Notater ØMO001

Tommy Odland – Sist endret: 19. november 2018– Forbehold om feil, bruk sunn fornuft.

▷ Generelle tips for oppgaveløsning

Skriv ned det du vet. Skriv ned du prøver å finne. Lag en tegning dersom du kan. Prøv å løs et liknende, men lettere problem. Sett prøve på svaret. Bedøm om svaret virker realistisk. Regn svaret på 2 måter dersom du vet om 2 teknikker.

▷ Algebra

- Vi løser $ax^2 + bx + c = 0$ med **abc-formelen**

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

  der x_1, x_2 er nullpunktene og vi kan skrive

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

- **Likningsystemer** kan løses på 2 forskjellige måter: (1) innsettingsmetoden eller (2) addisjon/subtraksjon av likninger. Uansett hvordan du løser må du huske å **sjekke svaret**. Innsettingsmetoden fungerer på de aller fleste likninger, mens addisjon/subtraksjon er stort sett enklere for lineære likningssystemer.
- Du bør ha kontroll på **potensregelene** og **logaritmeregelene**. En logaritme er invers av en potens, slik som at subtraksjon er invers av addisjon og divisjon er invers av multiplikasjon.

▷ Funksjoner med én variabel

- Dersom $f'(x^*) = 0$ for et punkt x^* så er x^* et **toppunkt**, **bunnpunkt** eller **sadelpunkt**.
- Man kan klassifisere punktet x^* ved å bruke **fortegnslinje**, eller **andrederiverttesten**.
- Andrederiverttesten sier at

$$f''(x^*) > 0 \text{ og } f'(x^*) = 0 \Rightarrow x^* \text{ er et bunnpunkt}$$
$$f''(x^*) < 0 \text{ og } f'(x^*) = 0 \Rightarrow x^* \text{ er et toppunkt}$$

- Et **vendepunkt** oppstår når den dobbelderiverte f'' endrer fortegn, altså går fra negativ til positiv eller motsatt.
  - Dersom $f'' > 0$ er funksjonen konveks: $\cup$.
  - Dersom $f'' < 0$ er funksjonen konkav: $\cap$.
- Den **deriverte** gir informasjon om stigningen til en funksjon. Noen vanlige regler for derivasjon er:

$$\begin{aligned}
f = ag(x) + bh(x) \quad &\Rightarrow f' = ag'(x) + bh'(x) \\
f = ax^n \quad &\Rightarrow f' = anx^{n-1} \\
f = e^{kx} \quad &\Rightarrow f' = ke^{kx} \\
f = \ln(kx) \quad &\Rightarrow f' = 1/x \\
f = f(g(x)) \quad &\Rightarrow f' = f'(g)g'(x) \\
f = uv \quad &\Rightarrow f' = u'v + uv'
\end{aligned}$$

- **Integralet** til en funksjon gir arealet under kurven. Dersom en funksjon $f(x)$ har en antiderivert $F(x)$, slik at $F'(x) = f(x)$, så er

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(a) - F(b).$$

- Noen vanlige formler og regler for integraler:

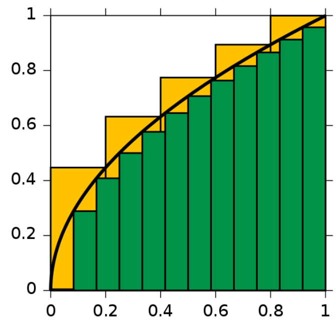
$$\int ag(x) + bh(x)\, dx = a \int g(x)\, dx + b \int h(x)\, dx$$
$$\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x)\Big| - \int u'(x)v(x)\, dx$$
$$\int f'(u)u'(x)\, dx = \int f(u)\, du$$
$$\int ax^n\, dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + C$$
$$\int e^{kx} = \frac{1}{k}e^{kx} + C$$
$$\int \frac{1}{x} = \ln(x) + C$$

Eksempel. Første regelen, og regelen for x^n og e^{kx}:

$$\int x^4 + e^{-x}\, dx = \int x^4\, dx + \int e^{-x}\, dx = \frac{1}{5}x^5 - e^{-x} + C$$

▷ Rekker

- En **rekke** er en sum av tall. En rekke er for heltallene $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ det samme som et integral er for de reelle tallene (hele tallinjen).



- En følge er **geometrisk** dersom det finnes en faktor k slik at $a_n = ka_{n-1}$ for alle n.
  - Geometriske rekker er som eksponentialfunksjoner $f(x) = e^x$, *veksten er proposjonal med verdien.*
- En følge er **aritmetisk** dersom det finnes en differanse d slik at $a_n = a_{n-1} + d$ for alle n.
  - Aritmetiske rekker er som lineære funksjoner $f(x) = ax$, *veksten er konstant.*
- Summen av de $n+1$ første leddene i en geometrisk rekke er

$$S_{n+1} = a\sum_{i=0}^{n} k^i = a\frac{k^{n+1}-1}{k-1}$$

dersom antall ledd går mot evig blir summen

$$S_\infty = \frac{a}{1-k}, \quad -1 < k < 1.$$

- Summen av de n første leddene i en aritmetisk rekke er $S_n = n\left(a_1 + a_n\right)/2$.

▷ Funksjoner av to variabler

- De **partiellderiverte** til $f(x,y)$ er de deriverte med hensyn på x og y, der den andre variabelen blir holdt konstant.
- **Taylor-rekken til** $f(x)$ er gitt ved

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) &\approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \\ &\quad + \frac{1}{2}\Delta x f''(x_0)\Delta x + \dots . \end{aligned}$$

Stasjonære punker oppstår når $f'(x_0) = 0$, og fortegnet til $f''(x_0)$ sier noe om min/maks/sadel.

- **Taylor-rekken til** $f(x,y) = f(\mathbf{x})$ er gitt ved

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) &\approx f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)\Delta x \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\Delta\mathbf{x}\right)^T H(\mathbf{x}_0)\Delta\mathbf{x} + \dots . \end{aligned}$$

Stasjonære punker oppstår når vektoren

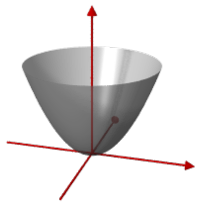
$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = [f_x(\mathbf{x}_0), f_y(\mathbf{x}_0)]$$

er lik null, altså når $f_x = 0$ og $f_y = 0$. Egenskapene til **Hesse-matrisen**

$$H(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(\mathbf{x}_0) & f_{yx}(\mathbf{x}_0) \\ f_{xy}(\mathbf{x}_0) & f_{yy}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

sier noe om hvilken type punkt det er:

  - $\det(H) < 0 \;\Rightarrow$ sadelpunkt.
  - $\det(H) > 0$ og $f_{xx} > 0 \;\Rightarrow$ minimum.
  - $\det(H) > 0$ og $f_{xx} < 0 \;\Rightarrow$ maksimum. Dette er andrederiverttesten i 2 dimensjoner.



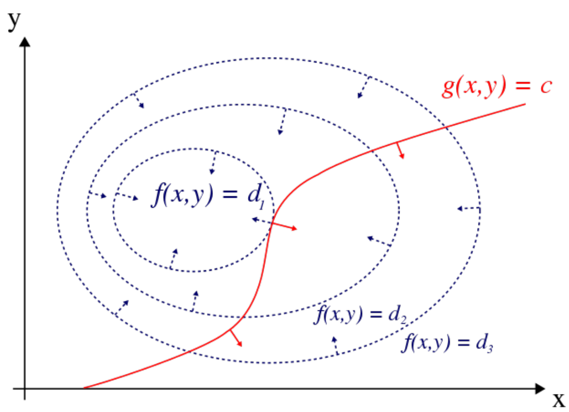
- **Lagrange** sin metode løser problemet

$$\begin{aligned} \text{minimer/maksimer} \quad & f(x,y) \\ \text{med bibetingelser} \quad & g_1(x,y) = C_1 \\ & g_2(x,y) = C_2 \end{aligned}$$

vi konstruerer **lagrangefunksjonen**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, y, \lambda_1, \lambda_2) &= f(x,y) + \\ &\quad \lambda_1\left(g_1(x,y) - C_1\right) + \lambda_2\left(g_2(x,y) - C_2\right) \end{aligned}$$

og **partiellderiverer** med hensyn på x, y, λ_1, λ_2 og setter lik null. Da har vi **4 ukjente og 4 likninger**, som vi kan løse. Punktet må klassifiseres som vanlig.



Eksempel. Maksimer $f = x + y$, med bibetingelse $x^2 + y^2 = r^2$. Vi får Lagrangefunksjon

$$\mathcal{L} = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - r^2)$$

og deriverer og får $\mathcal{L}_x = 1 + 2\lambda x = 0$, $\mathcal{L}_y = 1 + 2\lambda y = 0$ og $\mathcal{L}_\lambda = x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Fra de $\mathcal{L}_x$ og $\mathcal{L}_y$ ser vi at $x = y$. Punktet blir $(x,y) = (r/\sqrt{2}, r/\sqrt{2})$.