Notater MET1

Tommy Odland – Sist endret: 3. desember 2017– Forbehold om feil, bruk sunn fornuft.

▷ Generelle tips for oppgaveløsning

Skriv ned det du vet. Skriv ned du prøver å finne. Lag en tegning dersom du kan. Prøv å løs et liknende, men lettere problem. Sett prøve på svaret. Bedøm om svaret virker realistisk. Regn svaret på 2 måter dersom du vet om 2 teknikker.

▷ Funksjoner av én variabel

- Dersom $f'(x^*) = 0$ for et punkt x^* så er x^* et **toppunkt**, **bunnpunkt** eller **sadelpunkt**.
- Man kan klassifisere punktet x^* ved å bruke **fortegnslinje**, eller **andrederiverttesten**.
- **Andrederiverttesten** sier at

$$f''(x^*) > 0 \text{ og } f'(x^*) = 0 \Rightarrow x^* \text{ er et bunnpunkt}$$
$$f''(x^*) < 0 \text{ og } f'(x^*) = 0 \Rightarrow x^* \text{ er et toppunkt}$$

- Et **vendepunkt** oppstår når den dobbelderiverte $f''(x)$ endrer fortegn, altså går fra negativ til positiv eller motsatt.
  - Dersom $f'' > 0$ er funksjonen konveks: $\cup$.
  - Dersom $f'' < 0$ er funksjonen konkav: $\cap$.
- Den **deriverte** sier noe om stigningen til en funksjon. Noen vanlige regler for derivasjon er:

$$\begin{aligned} f = ag(x) + bh(x) &\Rightarrow f' = ag'(x) + bh'(x) \\ f = ax^n &\Rightarrow f' = anx^{n-1} \\ f = e^{kx} &\Rightarrow f' = ke^{kx} \\ f = \ln(kx) &\Rightarrow f' = 1/x \\ f = f(g(x)) &\Rightarrow f' = f'(g)g'(x) \\ f = uv &\Rightarrow f' = u'v + uv' \end{aligned}$$

- **Integralet** til en funksjon gir arealet under kurven. Dersom en funksjon $f(x)$ har en antiderivert $F(x)$, slik at $F'(x) = f(x)$, så er

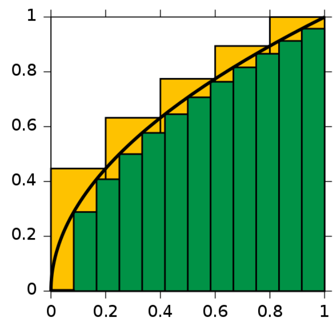
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$$

- Noen vanlige **formler og regler for integraler**:

$$\int ag(x) + bh(x)\,dx = a\int g(x)\,dx + b\int h(x)\,dx$$
$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big| - \int u'(x)v(x)\,dx$$
$$\int f'(u)u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$
$$\int ax^n\,dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + C$$
$$\int e^{kx} = \frac{1}{k}e^{kx} + C$$
$$\int \frac{1}{x} = \ln(x) + C$$

▷ Rekker

- En **rekke** er en sum av tall. En rekke er som et integral, men funksjonen er definert på heltallene $\mathbb{Z}$ istedet for på de reelle tallene $\mathbb{R}$.



- En følge er **geometrisk** dersom det finnes en faktor k slik at $a_n = ka_{n-1}$ for alle n.
  - Geometriske rekker er som eksponentialfunksjoner $f(x) = e^{kx}$— *veksten er proposjonal med verdien.*
- **Summen av en geometrisk rekke** er

$$S_n = a\sum_{i=0}^{n} k^i = a(1 + k + \cdots + k^n) = a\frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}.$$

Dersom antall ledd går mot evig blir summen

$$S_\infty = \frac{a}{1-k}, \quad -1 < k < 1.$$

▷ Funksjoner av to variabler

- De **partiellderiverte** til $f(x, y)$ er de deriverte med hensyn på x og y, der den ene variabelen blir holdt konstant. "Pene" $f(x, y)$ har $f_{xy} = f_{yx}$.
- **Taylor-rekken til** $f(x)$ er gitt ved

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) &\approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \\ &\quad + \frac{1}{2}\Delta x f''(x_0)\Delta x + \ldots. \end{aligned}$$

Stasjonære punker oppstår når $f'(x_0) = 0$, og fortegnet til $f''(x_0)$ sier noe om min/maks/sadel.

- **Taylor-rekken til** $f(x,y) = f(\mathbf{x})$ er gitt ved

$$f(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta\mathbf{x})^T H(\mathbf{x}_0)\Delta\mathbf{x} + \ldots.$$

Stasjonære punker oppstår når vektoren

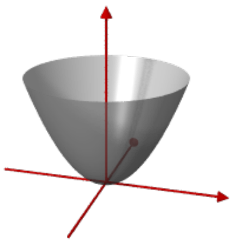
$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = [f_x(\mathbf{x}_0), f_y(\mathbf{x}_0)]$$

er lik null, altså når $f_x = 0$ og $f_y = 0$. Egenskapene til **Hesse-matrisen**

$$H(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(\mathbf{x}_0) & f_{yx}(\mathbf{x}_0) \\ f_{xy}(\mathbf{x}_0) & f_{yy}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

sier noe om hvilken type punkt det er.
(Dette er andrederiverttesten i 2 dimensjoner.)

  - $\det(H) < 0 \Rightarrow$ sadelpunkt.
  - $\det(H) > 0$ og $f_{xx} > 0 \Rightarrow$ minimum.
  - $\det(H) > 0$ og $f_{xx} < 0 \Rightarrow$ maksimum.



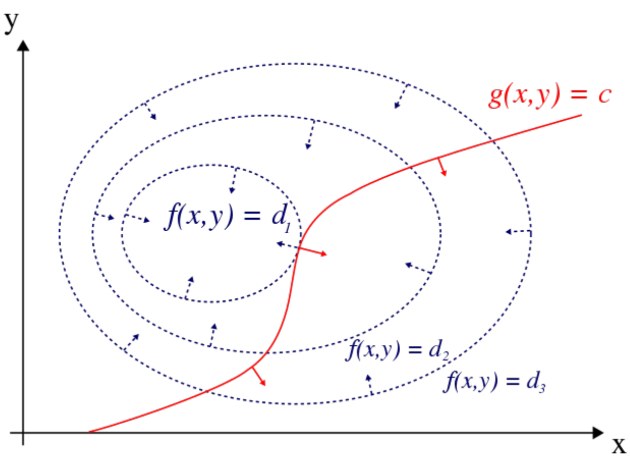
- **Lagrange** sin metode løser problemet

$$\begin{aligned} \text{minimer/maksimer} \quad & f(x,y) \\ \text{med bibetingelser} \quad & g(x,y) = C \end{aligned}$$

vi konstruerer **lagrangefunksjonen**

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\,(g(x,y) - C)$$

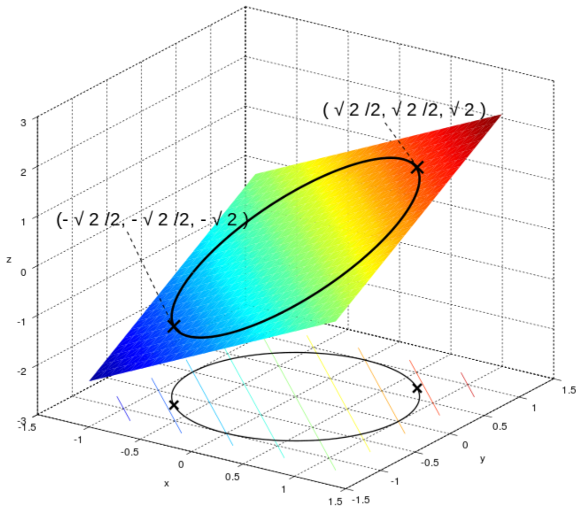
og **partiellderiverer** med hensyn på x, y, λ og setter lik null. Da har vi **3 ukjente og 3 likninger**, som vi kan løse. Punktet må klassifiseres som vanlig.



Eksempel. Maksimer $f = x + y$, med bibetingelse $x^2 + y^2 = r^2$. Vi får Lagrangefunksjon

$$\mathcal{L} = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - r^2)$$

og deriverer og får $\mathcal{L}_x = 1 + 2\lambda x = 0$, $\mathcal{L}_y = 1 + 2\lambda y = 0$ og $\mathcal{L}_\lambda = x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Fra $\mathcal{L}_x$ og $\mathcal{L}_y$ ser vi at $x = y$. Punktet blir $(x,y) = (r/\sqrt{2}, r/\sqrt{2})$.



- **Implisitt derivasjon** av $f(x,y) = C$ med hensyn på x gir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x,y)] = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' = 0$$

som vi løser med hensyn på y'.

▷ Lineær algebra

- Et likningssystem med n ukjente og n likninger $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en **entydig løsning** dersom $\det(A) \neq 0$. Dersom $\det(A) = 0$ så er én eller flere av kolonnevektorene parallelle, og systemet har ikke løsning for alle $\mathbf{b}$.
- **Cramers regel** sier at for $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ så kan vi finne x_j med formelen $x_j = \det(A_j)/\det(A)$, der A_j er A med kolonne j erstattet med $\mathbf{b}$.
- For å løse $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kan vi utføre elementære rekkeoperasjoner $EA\mathbf{x} = E\mathbf{b}$. Vi skriver ofte $(A \mid \mathbf{b})$. Målet er å få $EA = I$, slik at

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow EA\mathbf{x} = E\mathbf{b} \Rightarrow I\mathbf{x} = E\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = E\mathbf{b}$$

- For å løse $AX = I$ (finne A^{-1}) kan vi utføre **elementære rekkeoperasjoner** $EAX = EI$. Vi skriver ofte $(A \mid I)$. Målet er å få $EA = I$, slik at

$$AX = I \Rightarrow EAX = EI \Rightarrow IX = EI \Rightarrow X = E,$$

der $X = A^{-1}$ ettersom $AX = AA^{-1} = I$.