Matte 3 (HVL)

Tommy Odland
Amir M. Hashemi

10. mai 2019

Sammendrag

Dette heftet inneholder en rask oppsummering av Matte 3 (HVL), også kalt *multivariabel kalkulus*. Formålet er å gi studentene litt intuisjon rundt emnene. Du bør klare å regne på oppgavene, og du bør prøve å huske formlene som er nummererte. Det er også lagt inn noen tidligere eksamensoppgaver med fasit.

Innhold

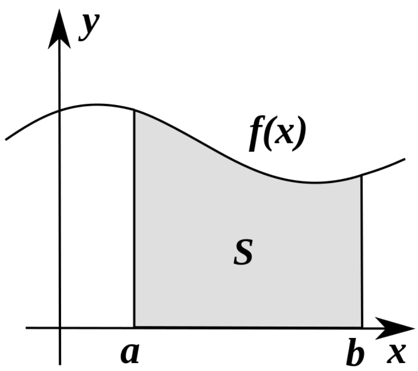
1 Introduksjon

Vi starter med å se på summen av positive heltall. Det er velkjent at summen av alle positive tall til og med n er gitt av formelen

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = S(n).$$

For å finne summen av alle tall fra 0 til og med n trenger vi ikke å plusse sammen tallene—vi trenger kun å evaluere funksjonen $S(n)$ én gang. For å finne summen av tallene $50 + 51 + \cdots + 99 + 100$ trenger vi kun å regne ut $S(100)$ - $S(49)$. Dersom vi finner en funksjon som $S(n)$, er summen over et hvilket som helst intervall $[a, b]$ lik $S(b)$ - $S(a-1)$. To funksjonsevalueringer er alt vi trenger for å regne ut summen.

Dette er hovedidéen bak *integrasjon*. Dersom vi kan finne en funksjon $F(x)$ slik at $F'(x) = f(x)$, kan vi si at $\int_a^b f(x)\,dx = F(a) - F(b)$. Dette kalles for fundamentalteoremet i kalkulus. Vi kan ikke garantere at den antideriverte til $f(x)$ finnes[1], men dersom den gjør det kan vi evaluere $F(x)$ på endepunktene. Endepunktene er a og b, tall langs den reelle tallinjen $\mathbb{R}^1$.



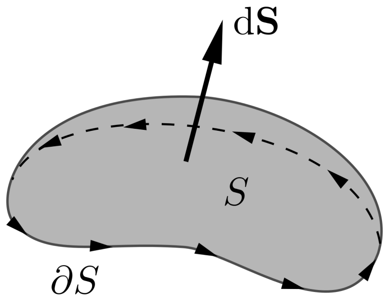
Figur 1: Integralet av en funksjon $f(x)$ av én variabel x.

Multivariabel kalkulus handler om akkurat det samme som funksjoner av én variabel—integraler over et område Ω kan reduseres til en annen evaluering langs *randen* $\partial\Omega$. I $\mathbb{R}^1$ er området $a < x < b$, og endepunktene (randen) er a og b. I $\mathbb{R}^2$ er området et areal og randen er kanten, og i $\mathbb{R}^3$ er området et volum og randen er overflatearealet.

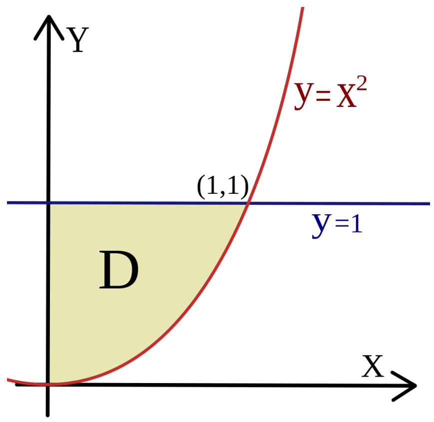
2 Parametrisering

Å *parametrisere* et område i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$ handler om å bestemme parametre slik at vi, ved å endre dem, kan bevege oss over området. Vi kan parametrisere linjer (1 parameter), areal (2 parametre) eller volum (3 parametre). I $\mathbb{R}^n$ kan vi bruke n, eller færre, parametre. Vi kan eksempelvis parametrisere et areal i $\mathbb{R}^2$ og i $\mathbb{R}^3$ med 2 parametre—dimensjonaliteten av underrommet bestemmer antall parametre.

[1] Funksjonen $f(x) = e^{-x^2}$ er et eksempel på en funksjon uten antiderivert.



Figur 2: Stokes teorem sier at informasjon om området S ligger i randen ∂S.



Figur 3: Et område D i $\mathbb{R}^2$

Oppgave 2.1 (Parametrisering). Området D i fig. 3 ovenfor kan parametriseres ved

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 < y < 1,\, 0 < x < 1\right\}.$$

Hvilken annen parametrisering kan vi bruke? For å løse denne oppgaven må du bestemme grensene for x med hensyn på y først. Regn deretter ut dobbelintegralet $\iint_D 1\,dx\,dy$ ved hjelp av parametriseringen ovenfor, og deretter $\iint_D 1\,dy\,dx$ ved hjelp av parametriseringen du nettopp fant. Bekreft at integralet blir $2/3$ i begge tilfellene. ⌟

3 Koordinatskifter

3.1 1 dimensjon (variabelskifte)

Vi skifter variabler og koordinater hele tiden i matematikk. For å regne ut det ubestemte integralet $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$ ville vi brukt *u-substitusjon* og valgt $u = x^2 + 1$. I *u-rommet* blir alle verdier av x ganget med seg selv, og plusset på 1.

Oppgave 3.1 (u-substitusjon). Finn en antiderivert til $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$ ved hjelp av u-substitusjon. Vis at en liten endring i x, dx, produserer en endring med lengde $(2x)^{-1}\,du$ i u-rommet. Tegn området $1 < x < 2$ i x-rommet og i u-rommet. ⌟

En endring Δx er generelt sett ikke lik en endring Δu. Forholdet du/dx er faktoren som binder endringer i x-rommet og u-rommet sammen. Det er en forholdsfaktor—den første ordens deriverte fra *Taylorrekken* til en funksjon i $\mathbb{R}^1$:

$$f(x + \Delta x) \simeq f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2} f''(x)(\Delta x)^2 + \dots \tag{3.1}$$

3.2 2 dimensjoner

Det samme prinsippet som ovenfor gjelder også i 2 dimensjoner. En vektorfunksjon av 2 variabler, $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, transformerer et punkt (x, y) til (u, v). Dersom u og v er lineære funksjoner av x og y er funksjonen F en matrise, og vi snakker om *lineær algebra*. Generelt trenger er ikke u og v å være lineære funksjoner.

Oppgave 3.2 (Vektorfunksjon). Vi studerer funksjonen $F(x, y) = (2x + y, x + 2y)$.

a) Hva blir (u, v) dersom $(x, y) = (1, 0)$? Tegn vektoren og den transformerte vektoren.
b) Hva blir (u, v) dersom $(x, y) = (0, 1)$? Tegn vektoren og den transformerte vektoren.
c) Er F lineær? Dersom svaret ditt er ja, hva er matrisen til F?
d) Regn ut arealet av parallellogrammet mellom vektorene $(1, 0)$ og $(0, 1)$. Regn ut arealet av parallellogrammet til de transformerte vektorene.

⌟

For vektorfunksjoner $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som tar inn en (x, y) og gir tilbake (u, v) ser Taylorrekken litt annerledes ut. Disse funksjonene skrives som $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, fordi vi sender inn et punkt i $\mathbb{R}^2$ og får et punkt i $\mathbb{R}^2$ tilbake. Fet skrift betyr vektor, slik at $\boldsymbol{x} = (x, y)$ i $\mathbb{R}^2$. Dersom $F(\boldsymbol{x}) = F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, skriver vi Taylorrekken som

$$F(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}) \simeq F(\boldsymbol{x}) + J(\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x} + \dots = \begin{bmatrix} u(\boldsymbol{x}) \\ u(\boldsymbol{y}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + \cdots \tag{3.2}$$

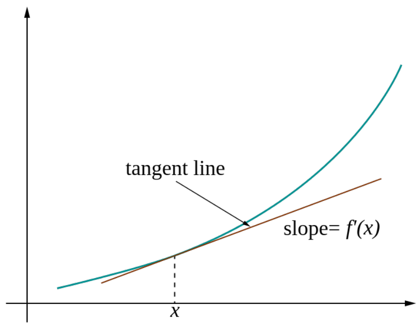
Matrisen $J(\boldsymbol{x})$ kalles *Jacobi-matrisen*, og er den beste lineære tilnærmingen til $F(\boldsymbol{x})$ i nærheten av $\boldsymbol{x}$. Dette er helt likt som i $\mathbb{R}^1$, der $f'(x)$ er den beste lineære tilnærmingen til $f(x)$ i nærheten av x.

Jacobi-matrisen $J(\boldsymbol{x})$ generaliserer den deriverte. Faktoren som erstatter du/dx er $|J(\boldsymbol{x})|$—absoluttverdien til determinanten av Jacobi-matrisen. En *lengdefaktor* erstattes med en *arealfaktor*, fordi arealet av et parallellogram er lik determinanten til matrisen med de tilhørende vektorene (i radene eller kolonnene; det har ingenting å si ettersom $\det(A) = \det(A^T)$.) Dette er den geometriske tolkningen av $\det(A)$. I $\mathbb{R}^3$ er determinanten lik volumet av *parallellepipedet* som vektorene spenner.

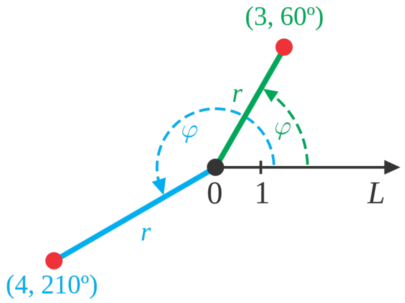
3.2.1 Polarkoordinater

Polarkoordinater er gitt av transformasjonen

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta), \end{aligned} \tag{3.3}$$



Figur 4: Tangentlinjen til $f(x)$ består av de første 2 leddene i Taylorrekken, og er den beste lineære (1. ordens) approksimasjonen til $f(x)$ i nærheten av x.



Figur 5: Polarkoordinater.

og Jacobi-matrisen for transformasjonen er gitt ved:

$$J = \frac{\partial (x, y)}{\partial (r, \theta)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

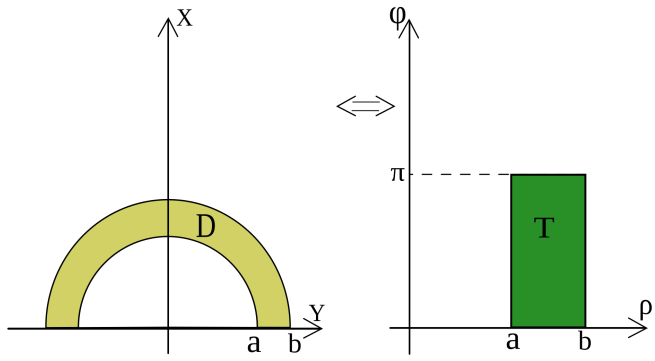
Oppgave 3.3 (Punkter i polarkoordinater). Uttrykk punktene $(1, 0)$, $(-3, 0)$, $(2, 2)$, $(3, 4)$ ved hjelp av polarkoordinater, altså ved r og θ. Du må gå andre veien i forhold til eq. (3.3). ⌟

Oppgave 3.4 (Determinanten til polarkoordinater). Vis at absoluttverdien av Jacobi-matrisen for transformasjonen i likning (3.3) er r. ⌟

Oppgave 3.5 (Integral i polarkoordinater). Integralet $\iint 1\, dx\, dy$ blir til $\iint r\, dr\, d\theta$ med variabelskifte til polarkoordinater. Sett opp grensene og regn ut integralet av en sirkelskive som vist i fig. 6. Den indre radiusen er a, og den ytre radiusen er b. Vis at arealet er $\pi\left(b^2 - a^2\right)/2$ med hjelp av integrasjon. ⌟

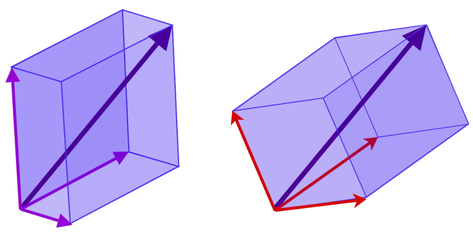
3.3 3 dimensjoner

Generaliseringen er helt lik som i 2 dimensjoner, men nå har vektoren $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ tre komponenter. Tallet $|J(\boldsymbol{x})|$ er den beste lineære approksimasjonen på hvordan et lite volum dV



Figur 6: Polarkoordinater.

endres av en funksjon, og et integral samler opp lineariseringer slik at $\int f'(x)\,dx = f(x)$. De viktigste koordinatskiftene er *sylindriske koordinater* og *kulekoordinater*. Den eneste forskjellen mellom dem er at i sylindriske koordinater blir ikke z transformert. Sylindrisk er som polarkoordinater i $\mathbb{R}^3$.



Figur 7: Et lite volum dV endres ved et koordinatskifte, størrelsen på endringen er $|J(\boldsymbol{x})|$.

3.3.1 Kulekoordinater

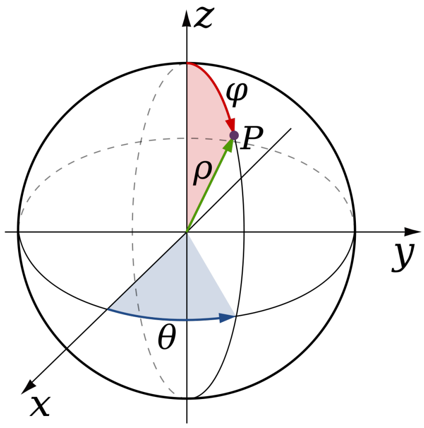
Sammenhengen mellom kartesiske koordinater og kulekoordinater er gitt av likningene

$$\begin{aligned} x &= r\sin(\phi)\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\phi)\sin(\theta) \\ z &= r\cos(\phi) \\ dV &= dx\,dy\,dz = |J(\boldsymbol{x})| = r^2\sin(\phi)\,dr\,d\theta\,d\phi \end{aligned}$$

Grensene er også viktige: θ går fra 0 til 2π, ϕ går fra 0 til π. Se fig. 8 for en illustrasjon.

Oppgave 3.6 (Underbestemte områder). I polarkoordinater er origo problematisk, fordi når $r = 0$ kan θ være hva som helst. Hvilke områder er problematiske i kulekoordinater? (Hint: Se på når $|J| = 0$). ⌟

Oppgave 3.7 (Volumet av en kule). Sett opp grensene og integrer $\iiint_\Omega dV$, der Ω er området $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$. Bruk dette til å vise at arealet av en kule med radius R er lik $4\pi R^3/3$. ⌟

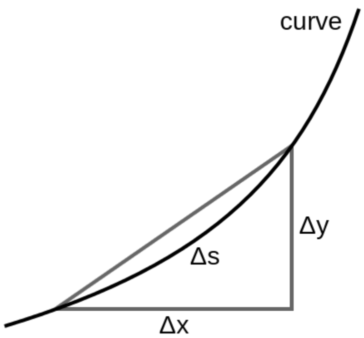


Figur 8: Kulekoordinater

4 Lengde, areal og volum

I denne seksjonen ser vi på generelle utregninger av kurvelengde, areal og volum. Koordinatskifter er et verktøy som kan brukes, men vi trenger ikke nødvendigvis å skifte koordinatsystem for å gjøre beregninger med lengde, areal og volum.

4.1 Lengde



Figur 9: Kurvelengden ds kan uttrykkes ved hjelp av dx og dy.

Idéen er å summere små lengder ds sammen over kurven c. Dersom en kurve er parametrisert med $r(t) = (x(t), y(t))$ er tangentvektoren $r'(t) = (x'(t), y'(t))$, og vi legger sammen $|r'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ over hele kurven c. Generelt kan vi skrive lengden L til kurven som

$$L = \int_c ds = \int_c \left| \frac{dr(t)}{dt} \right| dt. \tag{4.1}$$

Et spesialtilfelle er dersom $y = f(x)$. Da er parametriseringen enkel, fordi vi får

$$r(x) = (x, f(x)),$$

og dersom vi deriverer med hensyn på x får vi:

$$r_x = (1, f_x)$$

Vi tar lengden av denne vektoren, $|r_x|$, og får:

$$\sqrt{1 + (f_x)^2} \tag{4.2}$$

Dersom kurven c er slik at y er en funksjon av x, har vi altså at lengden er

$$L = \int_c ds = \int_c \sqrt{1 + (f_x)^2}\, dx. \tag{4.3}$$

Oppgave 4.1 (Omkretsen til en sirkel). Når man lærer noe nytt er det alltid lurt å sjekke at det stemmer på små, enkle eksempler. En sirkel kan parametriseres med $r(t) = (R\cos(t), R\sin(t))$. Bruk eq. (4.1) og vis at omkretsen er $2\pi R$. ⌟

Oppgave 4.2 (Heliks). En heliks kan parametriseres med $r(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$. Vi lar massetettheten $\sigma(t)$ være lik ct. Finn massen til heliksen, som går N runder, slik at $0 < t < 2\pi N$. Med andre ord, vis at $\int \sigma(t)\, ds = c\sqrt{a^2+b^2}(2\pi N)^2/2$. ⌟

4.2 Areal

Anta at vi har parametrisert et område i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$ ved hjelp av $r(u,v)$. Vi uttrykker et lite areal dA ved å endre r i retning mot u og mot v. Et lite areal er størrelsen av parallellogrammet som vektorene r_u og r_v spenner. Vi kan regne ut lengden av kryssproduktet—svaret er det samme. Husk at $r_u = \partial r/\partial u$.

$$A = \iint dA = \iint |r_u \times r_v|\, du\, dv \tag{4.4}$$

Oppgave 4.3 (Overflateareal av en kule). I denne oppgaven ser vi på en kule med konstant radius R. Arealet kan parametriseres ved hjelp av

$$r(\phi,\theta) = (x(\phi,\theta), y(\phi,\theta), z(\phi,\theta)) = (R\sin(\phi)\cos(\theta), R\sin(\phi)\sin(\theta), R\cos(\phi)),$$

og målet med oppgaven er å vise at arealet $A = 4\pi R^2$.

a) Regn ut $r_\theta = (x_\theta, y_\theta, z_\theta)$ og $r_\phi = (x_\phi, y_\phi, z_\phi)$.

b) Vis deretter at lengden av kryssproduktet $r_\theta \times r_\phi$ er lik $R^2 \sin\phi$.

c) Bruk resultatet fra forrige deloppgave til å regne ut $\iint dA = \iint |r_\theta \times r_\phi|\, d\theta\, d\phi$.

⌟

Igjen er det et spesialtilfelle dersom $z = f(x,y)$. Da kan vi parametrisere flaten med

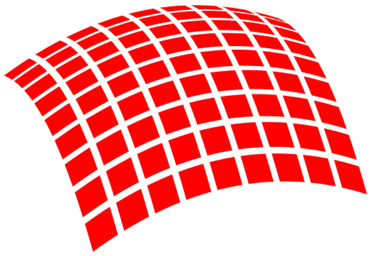
$$r(x,y) = (x, y, f(x,y)).$$

Dersom vi deriverer med hensyn på x og y får vi $r_x = (1, 0, f_x)$ og $r_y = (0, 1, f_y)$. Dersom vi tar kryssproduktet av disse vektorene og finner lengden får vi

$$|r_u \times r_v| = \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}. \tag{4.5}$$

Derfor kan vi si at dersom $z = f(x,y)$, kan vi regne ut arealet slik:

$$\iint_{\partial\Omega} dA = \iint_{\partial\Omega} \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}\, dx\, dy \tag{4.6}$$



Figur 10: Arealet A er lik summen av alle de små arealene: $A = \iint dA$

Oppgave 4.4 (Parabel). Vis at for $f(x, y) = x^2 + y^2$ blir $dA = \sqrt{4\left(x^2 + y^2\right) + 1}$. ⌟

Oppgave 4.5 (Areal av parabel). Tegn funksjonen $f(x, y) = x^2 + y^2$ og regn ut arealet innenfor området $x^2 + y^2 < R^2$. Vis at $A(R) = \pi\left(\left(4R^2 + 1\right)\sqrt{4R^2 + 1} - 1\right)/6$. ⌟

4.3 Volum

Samme prinsipper som med lengde og areal. Skaleringsfaktoren er $|J|$, absoluttverdien av determinanten til Jacobi-matrisen.

$$V = \iiint_\Omega dV = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega |J|\;du\,dv\,dw \tag{4.7}$$

Oppgave 4.6 (Volum avgrenset av plan). Å sette opp grensene er ofte vanskeligere enn å regne selve integralet. Vis at volumet avgrenset av planene $2x + 3y + z = 6$, $x = 0$, $y = 0$ og $z = 0$ er lik 6. ⌟

5 Grad, Div, Curl

Vi introduserer operatoren ∇ ("del"). I $\mathbb{R}^n$ kan vi tenke at ∇ en vektor med n partiellderiverte, altså at ∇ er en vektor med matematiske operasjoner. I $\mathbb{R}^3$ ser ∇ slik ut:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{5.1}$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \tag{5.2}$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (P, Q, R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = P_x + Q_y + R_z \tag{5.3}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{bmatrix} = \left(R_y - Q_z,\; P_z - R_x,\; Q_x - P_y\right) \tag{5.4}$$

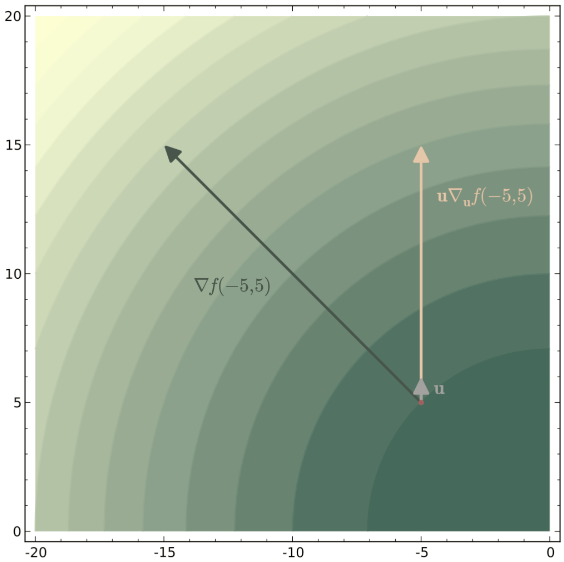
Med del kan vi uttrykke gradienten til en skalarfunksjon f, divergensen til et vektorfelt $\vec{F}$ og curl (rotasjon, sirkulasjon) til et vektorfelt $\vec{F}$. Del er også knyttet til Jacobi-matrisen

$J(\boldsymbol{x})$ og Hesse-matrisen $H(\boldsymbol{x})$. Resten av dette dokumentet handler kun om hvordan del kan brukes, og noen teoremer rundt dette. La oss se nærmere på grad, div og curl.

Navn	Notasjon	Input	Output	Beskrivelse
Gradient	∇f	f	$\vec{F}$	Retningen som f stiger raskest i, i et gitt punkt
Divergens	$\nabla \cdot \vec{F}$	$\vec{F}$	f	Utvidelsen til et vektorfelt $\vec{F}$
Curl	$\nabla \times \vec{F}$	$\vec{F}$	$\vec{F}$	Rotasjonen, eller sirkulasjonen, til et vektorfelt $\vec{F}$

5.1 Gradient

Gradienten er den retningen som $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vokser raskest i, som illustrert i fig. 11.



Figur 11: ∇f gir retningen som $f(\boldsymbol{x})$ vokser raskest i. $\nabla f \cdot u$ måler veksten i retning av u.

Dersom vi har en funksjon av n variabler, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, er ∇f gitt ved:

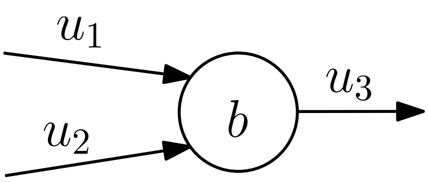
$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \tag{5.5}$$

Oppgave 5.1 (Gradient). Betrakt $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$. Finn $\nabla f(x, y) = \mathrm{grad}(f)$. Vis at i punktet $(1, 1)$ vokser ikke funksjonen i retning mot $u = (1, -1)$. ⌟

5.2 Divergens

Diskret divergens

Før vi ser på kontinuerlig divergens i vektorfelt studerer vi et *diskret* eksempel. En by har 2 transportasjonsruter inn i seg, og en rute ut av byen. Varemengder u_1 og u_2 sendes inn, byen har et forbruk b, og sender deretter u_3 enheter videre.

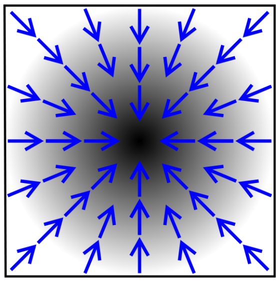


Figur 12: Noden symboliserer her en by, med influx, utflux og forbruk av en vare.

Dette gir *flow balance constraints* for hver node[1]. Balansen mellom influx, utflux og forbruk/produksjon gir likningen

$$\sum u_{\text{inn}} - \sum u_{\text{ut}} = b.$$

Dette er divergens i et diskret system. I et elektrisk nettverk sier *Kirchhoffs strømlov* at summen av alle strømninger inn og ut i et knutepunkt er lik null. Med andre ord er b lik 0—det er ingen divergens. Null divergens er konservasjon av elektroner.



Figur 13: Et vektorfelt med negativ divergens: $\nabla \cdot \vec{F} < 0$.

Kontinuerlig divergens

Vi beveger oss videre til kontinuerlig divergens i vektorfelt, se fig. 13 ovenfor. Bildet viser vektorfeltet $\vec{F} = (-x, -y)$. Pilen over $\vec{F}$ bruker vi for å minne oss selv på at funksjonen tar inn, og returnerer, en vektor, med andre ord $\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Generelt har et vektorfelt i $\mathbb{R}^3$, eksempelvis $\vec{F} = (P, Q, R)$, divergens lik:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_3} \tag{5.6}$$

I formelen ovenfor er P, Q og R er funksjoner av x, y og z. Vi kan regne ut divergens av vektorfelt i både $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$. Legg merke til at divergensen er en skalar, og ikke en vektor.

Oppgave 5.2 (Divergens av $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$). Hva er divergens for en funksjon av en variablel, $f(x)$? ⌟

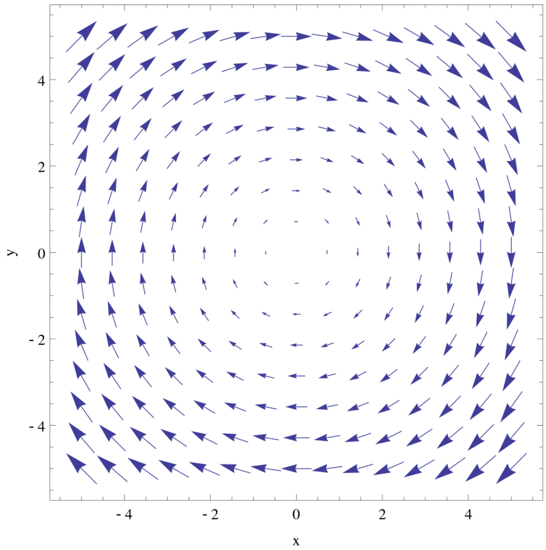
Oppgave 5.3 (Divergens i origo). Vis at divergensen til $\vec{F} = \left(e^{x^2 y}, \sin(xy)\right)$ er lik 0 i punktet $(0, 0)$. ⌟

[1] Optimal shipping mellom byer, der veiene kan ha kapasiteter og kostnader, løses av den berømte simplex-metoden. Et slikt problem kalles et *lineært program*.

Oppgave 5.4 (Finn funksjonen). Bestem Q slik at $\vec{F} = (x^2 y, Q)$ får divergens lik 0. ⌟

5.3 Curl

Curl er rotasjon, eller sirkulasjon, i et vektorfelt $\vec{F}$. Curl er gitt ved $\nabla \times \vec{F}$. Ta en kikk på fig. 14 nedenfor. Vektorfeltet har curl som ikke er lik null—dersom du slipper et objekt i en vannmasse med dette *fartsfeltet* (velocity field), vil objektet rotere.



Figur 14: Et vektorfelt med curl: $\vec{F} = (y, -x)$

Dersom $\vec{F} = (P, Q, R)$, er curl($\vec{F}$) gitt ved

$$\nabla \times \vec{F} = (R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y)\,. \tag{5.7}$$

Oppgave 5.5 (Curl i 2 dimensjoner). I $\mathbb{R}^2$ er $R = 0$ for alle vektorfelt. Vis at $\nabla \times \vec{F} = (0, 0, Q_x - P_y)$ i 2 dimensjoner. ⌟

Oppgave 5.6 (Enkel curl). Finn curl til vektorfeltet $\vec{F} = (y, -x)$. Dette er vektorfeltet vist i fig. 14. ⌟

Oppgave 5.7 (En identitet). La $\phi(x, y, z)$ være en skalarfunksjon. I denne oppgaven skal du vise at curl(grad(ϕ)) $= \nabla \times (\nabla \phi) = 0$ ved å skrive ut hele likningen på komponentform, og vise at alle leddene forsvinner. ⌟

Oppgave 5.8 (Enda en identitet). La $\vec{F}(x, y, z)$ være en vektorfunksjon. I denne oppgaven skal du vise at div(curl($\vec{F}$)) $= \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$ ved å skrive ut hele likningen på komponentform, og vise at alle leddene forsvinner. ⌟

De to identitetene ovenfor er et eksempel på en *eksakt sekvens* fra abstrakt algebra, og kan visualiseres ved hjelp av diagrammet

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, "\mathrm{grad}"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & \vec{F} \arrow[r, "\mathrm{curl}"] \arrow[rr, bend left, "0"] & \vec{F} \arrow[r, "\mathrm{div}"] & \mathbb{R}\,. \end{tikzcd}$$

6 Tre store teoremer

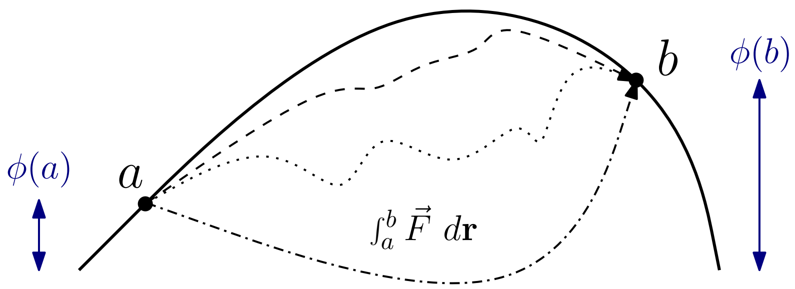
6.1 Gradientteoremet

Helt i starten av heftet skrev jeg at dersom vi kan finne en funksjon $F(x)$ slik at $F'(x) = f(x)$, kan vi si at $\int_a^b f(x)\,dx = F(a) - F(b)$. Dette gjelder også for linjeintegral i vektorfelt. Dersom vi kan finne en funksjon $\phi(x, y, z)$ slik at $\nabla\phi = \vec{F}$, kan vi si at

$$\int_a^b \vec{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(b) - \phi(a). \tag{6.1}$$

Dette er *gradientteoremet*. Funksjonen ϕ er en potensialfunksjon, og $\vec{F}$ er et vektorfelt. Merk at gradientteoremet gjelder **kun dersom det finnes en funksjon ϕ slik at** $\nabla\phi = \vec{F}$, og altså ikke for alle funksjoner $\vec{F}$. Dette er analogt med at $\int_a^b f(x)\,dx$ kun kan regnes ut analytisk dersom $f(x)$ har en antiderivert.

Eksempel Her er det enkleste eksempelet på gradientteoremet: $\phi(x, y)$ er høyden over havet på et koordinatpunkt (x, y). Funksjonen $\vec{F} = \nabla\phi$ gir informasjon om endringer i høyden. Dersom du går fra a til b, kan du finne høydeforskjellen ved å legge sammen alle de små endringene i høyden (dette tilsvarer venstre side av likning (6.1)), eller du kan se på forskjellen i høyden over havet (høyre side av likning (6.1)). Svaret er det samme fordi gravitasjonsfeltet kommer fra et potensiale.



Figur 15: Gradientteoremet—som å bevege seg over et fjell og måle høydeforskjellen.

Oppgave 6.1 (Baneuavhengighet). Forklar hvorfor hvilken sti man velger mellom a og b ikke utgjør forskjell i integralet i likning (6.1). Forklar matematisk, eller ved hjelp av eksempelet ovenfor. ⌟

Oppgave 6.2 (Et regneeksempel). I denne oppgaven ser vi på $\phi(x, y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)^2$.

a) Finn gradienten $\nabla\phi$.

b) Parametriser en rett linje c mellom $(0, 0)$ og (a, a).

c) Regn ut venstre side i eq. (6.1) fra $(0, 0)$ til (a, a).

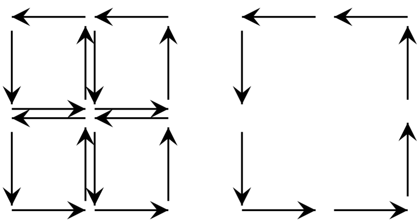
d) Regn ut høyre side i eq. (6.1) fra $(0, 0)$ til (a, a).

e) Vis at $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$.

f) Bruk stien $r(t) = (t, t^2/a)$, $0 < t < a$. Vis at du får samme resultat som i c) og d).

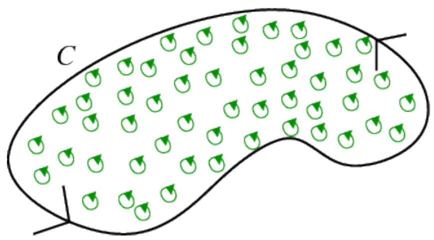
6.2 Stokes teorem

Stokes teorem sier at informasjon om sirkulasjonen (curl) i et område også ligger i randen. For å finne total sirkulasjon i et område kan vi enten *integrere over området*, eller *integrere langs randen*. Figuren nedenfor viser diskret curl i 2 dimensjoner.



Figur 16: Stokes teorem—sirkulasjon over et areal ligger i randen.

Som du ser vil pilene som ikke ligger langs randen kansellere hverandre. Dette er prinsippet bak både Stokes teorem og divergensteoremet. I kontinuerlig variant er dette bildet det riktige:

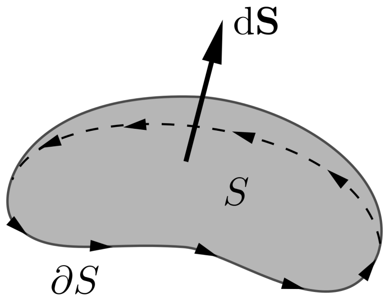


Figur 17: Stokes teorem—sirkulasjon over et areal ligger i randen.

Formelen for Stokes teorem er

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \hat{n}\, dS. \tag{6.2}$$

Enhets-normalvektoren $\hat{n}$ må være riktig orientert, og dette gjøres ved hjelp av høyrehåndsregelen.



Figur 18: En flate har 2 normalvektorer. Husk å bruk den som følger *høyrehåndsregelen*.

Oppgave 6.3 (Sirkulasjon). Vis at $\oint_c \vec{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$, når c er kurven langs en sirkel med radius R, og $\vec{F} = (-y^2, x^2)$. ⌟

Oppgave 6.4 (Greens teorem). Greens teorem sier at gitt $\vec{F} = (P, Q)$, så er

$$\oint_{\partial\Omega} (P\,dx + Q\,dy) = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

over en region Ω med rand $\partial\Omega$. Vis at dette er et spesialtilfelle av Stokes teorem i 2 dimensjoner, ved å bruke $\vec{F} = (P, Q, 0)$, $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$, $\hat{n} = (0, 0, 1)$ og $dS = dx\,dy$ i Stokes teorem til å utlede Greens teorem. ⌟

Oppgave 6.5 (Flateuavhengighetsprinsippet). Forklar at dersom Ω er et tredimensjonalt område, vil alltid flux integrert over hele randen være lik null. Med andre ord: $\oiint_{\partial\Omega} \left(\nabla \times \vec{F} \right) \cdot \hat{n}\, dS = 0$. Argumenter ved å "lime sammen" to områder som vist i fig. 18. ⌟

6.3 Divergensteoremet (Gauss' teorem)

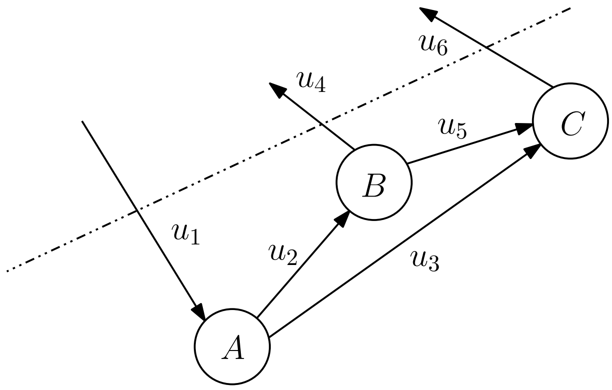
Et diskret eksempel Divergensteoremet sier at divergens i et område Ω er lik flux[2] ut av randen $\partial\Omega$: varer ut av en fabrikk er lik produksjonen inni fabrikken, energi ut av en kjernereaktor er lik energi produsert inni, etc. Igjen ser vi først på et diskret eksempel.

Betrakt fig. 19. Vi kaller den stiplete linjen for $\mathcal{C}$. Divergensen i området nedenfor den stiplete linjen er $\mathrm{div}(A) + \mathrm{div}(B) + \mathrm{div}(C)$. Dersom divergensen i nodene er lik null, får vi flow balance constraints for hver node med $b = 0$. Når vi legger disse likningeen sammen får vi at $-u_1 + u_4 + u_6 = 0$, og den samme informasjonen finnes i randen $\mathcal{C}$.

Her er divergensteoremet. Enhetsnormalen $\hat{n}$ peker ut av området Ω.

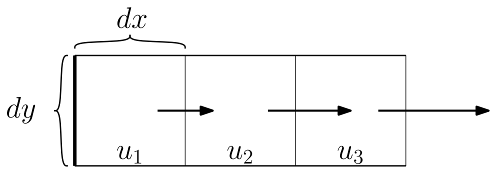
$$\oiint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n}\; dS = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F}\; dV \tag{6.3}$$

[2]Les https://en.wikipedia.org/wiki/Flux dersom du er usikker på hva flux er.



Figur 19: Diskret divergensteorem: flux ut er lik divergens inni.

Nok et diskret eksempel Betrakt figuren nedenfor. Divergens over tre diskret områder: u_1, u_2 og u_3. Total flux ut av randen er lik pilen helt til høyre: $\rightarrow$. La oss se på de individuelle områdene: flux ut av u_1 kansellerer flux inn i u_2, og flux ut av u_2 kansellerer flux inn i u_3 – vi står igjen med flux ut av u_3: $\rightarrow$. Dersom områdene blir mindre og mindre får vi divergensteoremet.



Figur 20: Flux i små differensialelementer.

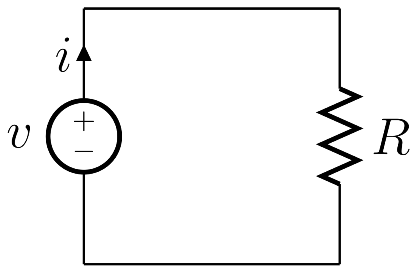
Oppgave 6.6. Bekreft divergensteoremet med $\vec{F} = (x, y)$. Regn fluxen ut av enhetsfirkanten begrenset av $0 < x < 1$ og $0 < y < 1$, regn deretter $\iint \nabla \cdot \vec{F}\, dx\, dy$. Resultatet skal uansett bli lik 2. ⌟

7 Elektriske nettverk

Matematikk er nyttig fordi det lar oss lage modeller for virkeligheten. En slik modell er modellen for *elektriske nettverk*, som vi nedenfor vier litt tid på å forklare i lys av funksjoner av flere variabler.

(1) Ohms lov I elektriske nettverk er strømmen I drevet av en spenningsforskjell ΔV. I multivariabel kalkulus er $\vec{F} = \nabla\phi$, dersom det ikke er curl i vektorfeltet. Funksjonen ϕ kalles da en potensialfunksjon. Potensialet driver strømmen.

(2) Kirchoffs strømlov I elektriske nettverk sier Kirchoffs strømlov at i et hvert knutepunkt er summen av strømmene $\sum_i I_i$ lik null. I multivariabel kalkulus er summen av influx og utflux lik null dersom divergensen er lik null: $\nabla\vec{F} = 0$.



Figur 21: En elektrisk krets.

(3) Kirchoffs spenningslov I elektriske nettverk er summen av alle spenningsendringene ΔV over en *loop* er alltid lik null. I multivariabel kalkulus er $\oint_c \vec{F}\ dr = 0$ dersom $\vec{F}$ kommer fra et potensiale.

Spenningspotensialet V er ϕ og strømmen I er $\vec{F}$. Vi knytter gradienten, divergens og curl til naturlover.
(1) *Cause and effect*: Strømninger drives av endringer i potensiale.
(2) *Conservation of matter*: Elektroner og masse blir ikke skapt, og forsvinner ikke.
(3) *Conservation of energy*: $\oint_c \vec{F}\ dr$ er et arbeide. Energi ut er lik energi inn i en lukket krets.

Takk for at du leste heftet mitt!
-*Tommy*

8 Tidligere eksamensoppgaver med fasit

8.1 Høsten 2017

Les oppgavene nøye! Oppgavene i denne eksamenen henger sammen. Det vil si at størrelser eller uttrykk definert i tidlige oppgaver av og til blir henvist til eller brukes i påfølgende oppgaver.

Oppgave 1

En lukket flate S er gitt ved

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4\right\}.$$

Flaten S er orientert slik at normalen til S peker bort fra volumet som S avgrenser. Der flaten S skjærer med xy planet får vi en kurve C er gitt ved:

$$C = \{(x, y, z) \in S|\, z = 0\}$$

(a) Beskriv S.

(b) La $g(x, y) = x^2 + y^2$, vis at kurven C kan beskrives som

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x, y) = 3\right\}$$

i xy planet.

(c) La $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x, y, z) = xy^2 + \frac{1}{2}z^2$. Vis at $\nabla f = (y^2, 2xy, z)$.

(d) Finn punktene på C hvor $f(x, y, z)$ har absolutt minimumsverdi og absolutt maksimumsverdi. Hint: Problemet kan reduseres til å finne ekstremalverdier av f redusert til en funksjon i xy planet.

Oppgave 2

La S_1 være flaten gitt ved:

$$S_1 = \{(x, y, z) \in S|\, z \geq 0\},$$

og S_2 være flaten gitt ved:

$$S_2 = \{(x, y, z) \in S|\, z \leq 0\},$$

hvor S er flaten fra oppgave 1. Flatene S_1 og S_2 har samme orientering som S. Avgjør om følgende påstander er sann, usann eller ubestemmelig. Begrunn svaret.

(i) Er

$$\iint_{S_1} dS = \iint_{S_2} dS?$$

(ii) Er

$$\int_{\partial S_1} f ds = \int_{\partial S_2} f ds,$$

hvor f er en kontinuerlig skalarfunksjon og ∂S_1 og ∂S_2 er randen til S_1 og S_2?

(iii) Er

$$\iint_{S_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} < \iint_{S_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

for et h vilkårlig C^1 vektorfelt $\mathbf{F}$?

(iv) Er

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

når $\mathbf{F}$ er et inkompressibelt vektorfelt, altså $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$?

Oppgave 3

(a) Vis at $\mathbf{c}_1(t) = (\sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}\sin t, 0)$ for $t \in [0, 2\pi]$ parametriserer kurven C fra oppgave 1 og beregn hvor langt en partikkel, med posisjon gitt av $\mathbf{c}_1(t)$, har beveget seg i tidsrommet $t \in [0, \frac{\sqrt{3}}{3}]$.

(b) Stien

$$\mathbf{c}_2(t) = (2\cos(2\pi t)\sin(\pi t), 2\sin(2\pi t)\sin(\pi t), 2\cos(\pi t) - 1), \text{ for } t \in [0, 1]$$

ligger også på flaten S fra oppgave 1. Beregn integralet:

$$\int_0^1 \mathbf{F} \cdot \mathbf{c}_2'(t) dt$$

for vektorfeltet $\mathbf{F} = (y^2, 2xy, z)$.

Oppgave 4

La flaten S_3 være gitt ved:

$$S_3 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq 3 \text{ og } z = 0\}$$

og la V være volumet avgrenset av flatene S_1 og S_3. Altså V er volumet gitt ved:

$$V = \{(x, y, z) | \, x^2 + y^2 + (z + 1)^2 \leq 4 \text{ og } z \geq 0\}$$

(a) Beregn volumet til V. Hint: Transformasjonen, $\mathbf{T} : D \to W$ gitt ved:

$$\mathbf{T}(r, \theta, \phi) = (r\cos(\theta)\sin(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), r\cos(\phi) - 1)$$

for $D = [0, 2] \times [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{3}]$ avbilder et volum W. Volumet til W er gitt ved: $\text{Vol}(W) = \text{Vol}(V) + \text{Vol}(K)$, der K er en kjegle som dere kan vise har volum $\text{Vol}(K) = \pi$.

Alternativt, så er det lett å se at transformasjonen $\mathbf{T}^*$ i sylinderkoordinater $\mathbf{T}^*(r, \theta, z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$ avbilder V direkte fra domene D^*, hvor $D^* = [0, \sqrt{3}] \times [0, 2\pi] \times [0, \sqrt{4 - r^2} - 1]$.

(b) Beregn

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

hvor vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved $\mathbf{F} = (y^2, 2xy, z)$.

8.2 Våren 2017

Oppgave 1

Bruk Lagrange metode til å finne største og minste verdier av

$$f(x, y) = xy\sqrt{z}$$

gitt at

$$x + y + z = 1,$$

der $x \geq 0$, $y \geq 0$, og $z \geq 0$.

Oppgave 2

Sylinderen $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 3$ kan parametriseres som

$$\vec{c}(s, t) = (2\cos s, 2\sin s, t), \quad 0 \leq s \leq 2\pi, \quad 0 \leq t \leq 3$$

(a) Skisser sylinderen, og forklar betydningen av s og t.

(b) Regn ut en normalvektor til sylinderflaten i punktet $(1, \sqrt{3}, 2)$ ved hjelp av parametriseringen over. Tegn inn normalvektoren i skissen av sylinderen.

(c) Bruk parametriseringen til å regne ut arealet av sylinderen.

(d) Lag en ny parametrisering med x og z som parametre, som beskriver den halvdelen av sylinderen der $y > 0$.

Regn ut en normalvektor i punktet $(1, \sqrt{3}, 2)$ ved hjelp av denne parametriseringen. Sammenlikn med svaret i (b) og forklar.

Oppgave 3

La C være den positivt orienterte randen til området som er avgrenset av kurvene $y = x^2$ og $y = \sqrt{x}$. Beregn kurveintegralet

$$\oint_C [2xy - x^2 + y\sin(xy)]\, dx + [x + y^2 + x\sin(xy)]\, dy.$$

Oppgave 4

En væske har konstant massetetthet ρ_0 kg/m^3 og hastighetsfelt

$$\vec{v} = (x^2 - y^2, 2xy, z) \text{ m/s}.$$

Netto masse som strømmer ut per tidsenhet gjennom overflaten til det sylindriske legemet

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad -1 \leq z \leq 1,$$

kan skrives som

$$\Phi_M = \oiint_S \rho_0 \vec{v} \cdot \vec{n} dS,$$

der S er overflaten og $\vec{n}$ er enhetsnormalvektoren på overflaten. Forklar hvorfor.

Beregn Φ_M.

8.3 Våren 2016

Oppgave 1

(a) Vis at vektorfeltet $\vec{F}$ gitt ved $\vec{F}(x, y, z) = (1 + y^2, 2xy + z^2, 2yz)$ er konservativt, og finn en potensialfunksjon til $\vec{F}$.

(b) Hva vet vi om kurveintegraler til et konservativt vektorfelt?

Gitt $\vec{F}$ som i (a), beregn kurveintegralet

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

langs kurven C som er parametrisert ved $\vec{c}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ for $0 \leq t \leq 2\pi$.

Oppgave 2

(a) La f være funksjonen gitt ved $f(x, y, z) = \cos x + e^{3yz}$. I hvilken retning blir den retningsderiverte til f størst i punktet $(\pi,\ 0,\ 1)$? Begrunn svaret.

Regn ut den retningsderiverte i punktet $(\pi,\ 0,\ 1)$ i den retningen.

(b) La C være den plane kurven gitt ved parameterfremstillingen:

$$\vec{c}(t) = (3(t-1)^2), 2(2t-1)^{\frac{3}{2}}) \quad \text{for} \quad 1 \leq t \leq 5.$$

Finn lengden av kurven.

Oppgave 3

La S være flaten gitt ved

$$2z = x^2 + y^2 \quad \text{og} \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

der x, y og z er lengder målt i meter.

(a) Lag en skisse av flaten S. Vis at

$$\vec{c}(s, t) = (s \cos t, s \sin t, s^2/2), \quad \text{der} \;\; 0 \leq s \leq 1 \;\; \text{og} \;\; 0 \leq t \leq 2\pi,$$

er en parameterfremstilling av flaten.

Finnes det en annen måte å parametrisere S på? Begrunn svaret.

(b) Bruk en av parameterfremstillingene til å finne enhetsnormalvektoren $\vec{N}$ til flaten S.

Kan en finne enhetsnormalvektoren N på en annen måte her? Begrunn svaret.

(c) Regn ut arealet

$$\iint_S dS$$

til flaten S.

Oppgave 4

(a) La $\vec{u}$ være hastighetsfeltet gitt ved $\vec{u} = r\vec{r}$, der $\vec{r} = (x, y, z)$ og $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Avgjør hvilke av følgende uttrykk som har mening og beregn disse:

i) div(div $\vec{u}$) ii) grad(div $\vec{u}$) iii) curl(div $\vec{u}$) iv) curl(curl $\vec{u}$).

(b) Regn ut fluksen av vektorfeltet

$$\vec{F}(x, y, z) = (g(x, y) + xz, h(x, y) + yz, 1)$$

gjennom flaten S som er gitt ved $2z = x^2 + y^2$ og $0 \leq z \leq \frac{1}{2}$, og som er orientert slik at normalen har positiv z-koordinat. Det vi ellers vet om g og h er at g ikke endrer seg i x-retningen og at h ikke endrer seg i y-retningen.

8.4 Høsten 2015

Oppgave 1

Gitt halvkulen H ved $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ og $z \geq 0$, og sylinderen Q ved $x^2 + y^2 = 2x$[3]. Betrakt S den delen av halvkuleoverflaten som er kuttet av sylinderen. La C være randen til S.

(a) Lag en skisse som viser H, Q, S og C.

Finn en parameterframstilling til kurven C. Finn lengden av kurven.

(b) Gitt vektorfeltet $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}$. Beregn direkte sirkulasjonen

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

langs kurven C i retning mot klokken sett ovenfra[4].

Er $\vec{F}$ konservativt? Begrunn ditt svar.

Oppgave 2

La V være området avgrenset av sylinderen $x^2 + y^2 = 1$, og planene $z = 1 - x$ og $z = 0$. La $\vec{F} = (z - y)\vec{i} + e^x\vec{j} + y\vec{k}$ være vektorfeltet som er gitt.

(a) Skisser V og overflatene som avgrenser V.

La S være sylinderoverflaten til V. Finn en parameterframstilling til S.

(b) La $\vec{G} = \nabla \times \vec{F}$ være curlen til $\vec{F}$. Bergen $\vec{G}$. Vis at divergens til G er lik 0.

Finn fluksen til $\vec{G}$ gitt ved

$$\iint_S \vec{G} \cdot d\vec{S},$$

ut gjennom S.

Oppgave 3

La $f(x, y, z) = x + y + z$ representere temperaturen på enhetskulen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ og i luften rundt enhetskulen.

(a) Finn retningsderiverte til f i et vilkårlig punkt (a, b, c) på enhetskulen, i retning av normal vektoren til enhetskulen i det punktet?

(b) Beskriv med ord og med likninger, mengden av punkter (a, b, c) på enhetskulen, der retningsderiverte er lik 0.

(c) I hvilke punkt på enhetskulen, og retning, vokser eller avtar temperaturen mest?

[3] Merk at $x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$

[4] I boken "Analys i flera variabler" er det brukt $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ i stedet for $\vec{F} \cdot d\vec{s}$.

8.5 Høsten 2015 (ekstra)

No 1 Let C be the intersection of $x^2 + y^2 = 1$ and $z = 1 - x$. Let $\mathbf{F} = (z - y)\mathbf{i} + y\mathbf{k}$.

(a) Calculate $\nabla \times \mathbf{F}$.

(b) Calculate $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ using a parametrization of C and a chosen orientation for C.

(c) If S is the enclosed flat surface by C(counterclockwise orientation viewed from above), calculate flux of $\nabla \times \mathbf{F}$ over S.

(d) If V is the volume bounded by $x^2 + y^2 = 1$ and $z = 1 - x$ and $z = 0$, calculate outward flux of $\nabla \times \mathbf{F}$ over $\tilde{S}$, where $\tilde{S}$ is the surfaces of V.

No 2 Let $\mathbf{G}(x, y) = (xe^{x^2+y^2} + 3x^2y)\mathbf{i} + (ye^{x^2+y^2} + x^3)\mathbf{j}$.

(a) Show that $\mathbf{G} = \nabla f$ for some f; find such an f.

(b) Use (a) to show that the line integral of $\mathbf{G}$ around the edge of the triangle with vertices $(0, 0)$,$(0, 3)$,$(3, 0)$ is zero.

(c) State Green's theorem for the triangle in (b) and a vector field $\mathbf{F}$ and verify it for the vector field $\mathbf{G}$ above.

No 3 Let $\mathbf{F}(x, y) = (2y^3 - 5y)\mathbf{i} + (4x - x^3)\mathbf{j}$.

(a) Let C be the intersection of $z = 9 - 3x^2 - 6y^2$ and $z = 1$, calculate $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ with Greens Theorem.

(b) Calculate sum of volume V_t bounded by $z = 9 - 3x^2 - 6y^2$ and $z = 1$ and the V_b of corresponding base (the vertical cylinder connecting top part and xy-plane) above xy-plane.

(c) Find the $\tilde{C}$ which makes the $\int_{\tilde{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ maximum; Calculate $\int_{\tilde{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.

(d) Calculate the outward flux of $\mathbf{F}$ over the surfaces of V

No 4 Consider the function $f(x, y, z) = x + y + z$.

(a) What is the directional derivative of f at a point (x_0, y_0, z_0) on the unit sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ along the unit outer normal vector of the sphere?

(b) Describe in words and by equation the set of points where this directional derivative zero.

(c) At which points of the unit sphere does such a directional derivative attain its maximum/minimum?

No 5 Let S be the surface given by the parametrization $x = u^2$, $y = u^2 \cos v$, $z = u^2 \sin v$ for $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 2\pi$.

(a) Sketch and describe in words the surface S.

(b) Use this parametrization to compute the integrals $\iint_S x^n d\sigma$.

No 6 A pair of areas are bounded by $xy - x - y = -\frac{1}{2}$,$xy - x - y = 0$, $x^2 - y^2 - 2x + 2y = 1$ and $x^2 - y^2 - 2x + 2y = 2$.

(a) Sketch and find the point P about which these areas are symmetric.

(b) The material density is proportional to the square of distance to point P and the ratio is α. Calculate the mass of these areas using new variables $u = x^2 - y^2 - 2x + 2y$ and $v = xy - x - y$.

No 7 Consider the three–dimensional region D given by $x^2 + y^2 \leq z^2 + 1$ and $x^2 + y^2 + 3z^2 \leq 5$.

(a) Describe in words and sketch D.

(b) Set up integrals (including appropriate limits) to integrate a function $f(x, y, z)$ on D in cylindrical coordinates.

No 8 Consider the surface S cut out from the hemisphere $H : x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$, by the cylinder $Q : x^2 + y^2 = 2x$. Let C be the boundary of S, oriented counterclockwise when viewed from the top. Compute the circulation of $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k}$ along C.

9 Fasit

9.1 Fasit-Høsten 2017

Les oppgavene nøye! Oppgavene i denne eksamenen henger sammen. Det vil si at størrelser eller uttrykk definert i tidlige oppgaver av og til blir henvist til eller brukes i påfålgende oppgaver.

Oppgave 1

En lukket flate S er gitt ved:

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4\right\}.$$

Flaten S er orientert slik at normalen til S peker ut av volumet som S avgrenser. Der flaten S skjærer med xy planet får vi en kurve C er gitt ved:

$$C = \{(x, y, z) \in S \mid z = 0\}$$

(a) Beskriv S.

Flaten S er et kuleskall er den kritiske beskrivelsen. Beskrivelsen er fullverdig hvis vi legger til at det er kuleskallet til en kule med sentrum i $(0, 0, -1)$ og radius $r = 2$.

(b) La $g(x, y) = x^2 + y^2$, vis at kurven C kan beskrives som

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 3\right\}$$

i xy planet.

I xy-planet er $z = 0$. Dermed kan vi skrive: $x^2 + y^2 = 3$

(c) La $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x, y, z) = xy^2 + \frac{1}{2}z^2$. Vis at $\nabla f = (y^2, 2xy, z)$.

Dette er rett frem fordi $\nabla f = (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f) = (y^2, 2xy, z)$, men denne oppgaven er lagt her fordi jeg senere vil definere et vektorfelt $\mathbf{F} = (y^2, 2xy, z)$ med de implikasjonene det har uten å si dette direkte.

(d) Finn punktene på C hvor $f(x, y, z)$ har absolutt maksimumsverdi og absolutt minimumsverdi. Hint: Problemet kan reduseres til å finne ekstremalverdier av f redusert til en funksjon i xy planet.

Denne oppgaven kunne vært gjort som en Lagrange metode med flere betingelser på f, men det har vi ikke gått igjennom på forelesning. Effektivt vil en betingelsen om at $f(x, y, z)$ ligger i xy-planet lede til konklusjonen som jeg gir i hintet. Ved Lagrange metode får jeg $y^2 = \lambda 2x$ og $2xy = \lambda 2y$, hvorfra jeg enten slutter at $y^2 = 2x^2$ eller at $y = 0$. Hvis $y^2 = 2x^2$ følger det fra $g(x, y)$ at $x^2 = 1$, og dermed at $y^2 = 2$ som tilsammen gir 4 punkter: $(-1, \pm\sqrt{2})$ og $(1, \pm\sqrt{2})$.

Hvis $y = 0$, så er $x = \pm\sqrt{3}$, som gir to punkter $(\pm\sqrt{3}, 0)$. Ved å beregne f i disse punktene finner jeg at punktene $(-1, \pm\sqrt{2})$ gir absolutt minimumsverdi med $f(-1, \pm\sqrt{2}, 0) = -2$ og punktene $(1, \pm\sqrt{2})$ gir absolutt minimumsverdi med $f(1, \pm\sqrt{2}, 0) = 2$.

Oppgave 2

La S_1 være flaten gitt ved:

$$S_1 = \{(x,y,z) \in S \mid z \geq 0\},$$

og S_2 være flaten gitt ved:

$$S_2 = \{(x,y,z) \in S \mid z \leq 0\},$$

hvor S er flaten fra oppgave 1. Flatene S_1 og S_2 har samme orientering som S. Avgjør om følgende påstander er sanne, usanne eller ubestemmelige. Begrunn svaret.

Det er avgjørende at det foreligger en meningsfull begrunnelse for svaret.

(i) Er

$$\iint_{S_1} dS = \iint_{S_2} dS?$$

Feil, arealet av S_1 er mindre enn arealet av S_2.

(ii) Er

$$\int_{\partial S_1} f\, ds = \int_{\partial S_2} f\, ds,$$

hvor f er en kontinuerlig skalarfunksjon og ∂S_1 og ∂S_2 er randen til S_1 og S_2?

Rett, ettersom disse integralene er uavhengig av orientering og S_1 og S_2 har samme rand.

(iii) Er

$$\iint_{S_1} \nabla \times \mathbf{F}\, d\mathbf{S} < \iint_{S_2} \nabla \times \mathbf{F}\, d\mathbf{S},$$

for et vilkårlig C^1 vektorfelt $\mathbf{F}$?

Ubestemmelig, det en kan si er at $\iint_{S_1} \nabla \times \mathbf{F}\, d\mathbf{S} = -\iint_{S_2} \nabla \times \mathbf{F}\, d\mathbf{S}$.

(iv) Er

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

når $\mathbf{F}$ er et inkompressibelt vektorfelt, altså $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$?

Rett, det følger av Gauss teorem at $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$. Med ord: den totale fluxen ut av et legeme i et inkompressibelt vektorfelt er alltid lik null.

Oppgave 3

(a) Vis at $c_1(t) = (\sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}\sin t, 0)$ for $t \in [0, 2\pi]$ parametriserer kurven C fra oppgave 1 og beregn hvor langt en partikkel, med posisjon gitt av $c_1(t)$, har beveget seg i tidsrommet $t \in [0, \frac{\sqrt{3}}{3}]$.

Parametriseringen vises ved å sette $x = \sqrt{3}\cos t, y = \sqrt{3}\sin t$ inn i utrykket $g(x, y)$ og vise at dette blir 3, som betyr at alle punkter i $c_1(t)$ er på kurven C. Vi kan anta at observasjonene $c_1(0) = c_1(2\pi)$ og at $c_1(t)$ ellers er en-til-en er selvinnlysende, ettersom jeg frykter at dette ikke vil bli nevnt.

$$L = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \|c_1'(t)\|\, dt = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \sqrt{3}\, dt = 1$$

(b) Stien

$$\mathbf{c}_2(t) = (2\cos(2\pi t)\sin(\pi t), 2\sin(2\pi t)\sin(\pi t), 2\cos(\pi t) - 1), \text{ for } t \in [0, 1]$$

ligger også på flaten S fra oppgave 1. Beregn integralet:

$$\int_0^1 \mathbf{F} \cdot \mathbf{c}_2'(t) dt$$

for vektorfeltet $\mathbf{F} = (y^2, 2xy, z)$.

Fra oppgave 1c) ser vi at $\nabla f = (y^2, 2xy, z) = \mathbf{F}$, hvor $f(x, y, z) = xy^2 + \frac{1}{2}z^2$. Dette medfører at $\mathbf{F}$ er et konservativt felt og integralet blir

$$\int_0^1 \mathbf{F} \cdot c_2'(t)\, dt = f(c(1)) - f(c(0)) = f(0, 0, -3) - f(0, 0, 1) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4.$$

Oppgave 4

La flaten S_3 være gitt ved:

$$S_3 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 3 \text{ og } z = 0\}$$

og la V være volumet avgrenset av flatene S_1 og S_3. Altså V er volumet gitt ved:

$$V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + (z+1)^2 \leq 4 \text{ og } z \geq 0\}$$

(a) Beregn volumet til V. Hint: Transformasjonen, $\mathbf{T} : D \to W$ gitt ved:

$$\mathbf{T}(r, \theta, \phi) = (r\cos(\theta)\sin(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), r\cos(\phi) - 1)$$

for $D = [0, 2] \times [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{3}]$ avbilder et volum W. Volumet til W er gitt ved: $\text{Vol}(W) = \text{Vol}(V) + \text{Vol}(K)$, der K er en kjegle som dere kan vise har volum $\text{Vol}(K) = \pi$.

Alternativt, så er det lett å se at transformasjonen $\mathbf{T}^*$ i sylinderkoordinater $\mathbf{T}^*(r, \theta, z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$ avbilder V direkte fra domene D^*, hvor $D^* = [0, \sqrt{3}] \times [0, 2\pi] \times [0, \sqrt{4 - r^2} - 1]$.

Det er flere mulige fremgangsmåter for å løse denne oppgaven. Enten beregner man

$$\mathit{Vol}(W) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} r^2 \sin(\phi)\, d\phi\, d\theta\, dr = \frac{8}{3}\pi.$$

Og kom fram til at $\mathit{Vol}(V) = \mathit{Vol}(W) - \pi = \frac{5}{3}\pi$. *Alternativt kan man beregne*

$$\mathit{Vol}(V) = \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{4-r^2}-1} r\, dz\, d\theta\, dr = \frac{5}{3}\pi,$$

der den øvre grensen for z *kommer av at* $r^2 + (z+1) = 4$, *og å løse for* z *gir grensen.*

(b) Beregn

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

hvor vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved $\mathbf{F} = (y^2, 2xy, z)$.

Vi bruker Gauss teorem $\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iint_{S_1} (\mathbf{F} \cdot \hat{n})\, dS + \iint_{S_3} (\mathbf{F} \cdot \hat{n})\, dS$, *der* $(\mathbf{F} \cdot \hat{n})\, dS$ *er det samme som* $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

Vi ser først at fluxen ut av V *er gitt ved*

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iiint_V (2x + 1)\, dV = 0 + \mathit{Vol}(V) = \frac{5}{3}\pi$$

ettersom V *er symmetrisk og* $2x$ *er odde. Og fluksen gjennom* S_3 *må være* 0 *ettersom normalvektoren til* S_3 *er* $\hat{n} = (0, 0, -1)$ *og vi får*

$$\iint_{S_3} (\mathbf{F} \cdot \hat{n})\, dS = \iint_{S_3} -z\, dS = \iint_{S_3} 0\, dS = 0,$$

ettersom $z = 0$ *på hele* S_3*. Fra dette følger det fra Gauss teorem at* $\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 5\pi/3$*. Alternativt kan en beregne fluksen direkte ved å parametrisere* S_1 *med*

$$\Phi(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), \sqrt{4 - r^2} - 1)$$

og så beregne $T_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = (\cos(\theta), \sin(\theta), -\frac{r}{\sqrt{4-r^2}})$ *og* $T_\theta = (-r\sin(\theta), r\cos(\theta), 0)$*. Så kan en sette opp integralet*

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \cdot (T_r \times T_\theta)\, d\theta\, dr \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \frac{3r^4 \cos(\theta)\sin^2(\theta)}{\sqrt{4 - r^2}} + r\sqrt{4 - r^2} - r\, d\theta\, dr = \frac{5}{3}\pi.\end{aligned}$$

9.2 Fasit-Våren 2017

Oppgave 1

Bruk Lagrange metode til å finne største og minste verdier av

$$\begin{aligned} f(x,y) &= xy\sqrt{z} \\ \text{gitt at} \quad x+y+z &= 1, \end{aligned}$$

der $x \geq 0$, $y \geq 0$, og $z \geq 0$.

Merk: trykkfeil i oppgaveteksten, $f(x,y)$ skal være $f(x,y,z)$.

Solution to Opp. 1:

Following the Lagrange multiplier method, and defining $f(x,y,z) = xy\sqrt{z}$ and $g(x,y,z) = x+y+z-1$, the corresponding optimal conditions given by

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,z) &= \lambda \nabla g(x,y,z), \\ g(x,y,z) &= 0, \end{aligned}$$

translate into the following set of equations:

$$\begin{aligned} y\sqrt{z} &= \lambda \\ x\sqrt{z} &= \lambda \\ \frac{xy}{2\sqrt{z}} &= \lambda \\ x+y+z &= 1 \end{aligned} \tag{9.1}$$

with $x \geq 0$, $y \geq 0$, and $z \geq 0$, is a triangular plane, with its sides corresponding to $x = 0$, $y = 0$ and $z = 0$. Along these three sides we already know the value of the function, which is 0.

We only need to consider the case when $x > 0$, $y > 0$, and $z > 0$. Clearly $\lambda \neq 0$ in this case, from equations (9.1). From the first three equations of (9.1), we immediately get $x = y = 2z$. Together with the fourth equation, it gives $x = y = 2/5$ and $z = 1/5$. Only one extreme point inside.

$$\begin{aligned} f(2/5, 2/5, 1/5) &= \frac{4\sqrt{5}}{125} \quad \text{(maximum value)} \\ f(x=0) = f(y=0) = f(z=0) &= 0 \quad \text{(minimum value)} \end{aligned}$$

Oppgave 2

Sylinderen $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 3$ kan parametriseres som

$$\vec{c}(s,t) = (2\cos s, 2\sin s, t), \quad 0 \leq s \leq 2\pi, \quad 0 \leq t \leq 3$$

(a) Skisser sylinderen, og forklar betydningen av s og t.

(b) Regn ut en normalvektor til sylinderflaten i punktet $(1, \sqrt{3}, 2)$ ved hjelp av parametriseringen over. Tegn inn normalvektoren i skissen av sylinderen.

(c) Bruk parametriseringen til å regne ut arealet av sylinderen.

(d) Lag en ny parametrisering med x og z som parametre, som beskriver den halvdelen av sylinderen der $y > 0$.

Regn ut en normalvektor i punktet $(1, \sqrt{3}, 2)$ ved hjelp av denne parametriseringen. Sammenlikn med svaret i (b) og forklar.

Solution to Opp. 2:

(a) Here s and t correspond to the angle (in radian) and the height (along the z-axis), respectively, and are used to describe the domain $D = \{(s,t) : \; 0 \le s \le 2\pi, \; 0 \le t \le 3\}$ in $\mathbb{R}^2$, which is mapped to the cylinder surface $\vec{c}(D)$ in $\mathbb{R}^3$ by the the vector valued function $\vec{c}(s,t)$.

In other words, the surface $\vec{c}(D)$ is the image of D under the function $\vec{c}$. Each point (s,t) in D corresponds to the point $(2\cos s, 2\sin s, t)$ on the cylinder surface.

(b) Let the cyllinder surface be called Y_S. With its given parametrization, with s and t as parameters, we find the normal vector to the surface in tow steps:

1) Tangent vectors along s and t:

$$\vec{c_s}'(s,t) = (-2\sin s, 2\cos s, 0),$$

and

$$\vec{c_t}'(s,t) = (0,0,1).$$

2) The normal vector is given as the cross product between the two tangents:

$$\vec{n}_{Y_S} = \vec{c_s}'(s,t) \times \vec{c_t}'(s,t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2\sin s & 2\cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2\cos s, 2\sin s, 0).$$

The point $(1, \sqrt{3}, 2)$ corresponds to the values $s = \pi/3$ and $t = 2$ ($\cos s = 1/2$ and $\sin s = \sqrt{3}/2$). The normal vector is therefore $\vec{n}(1, \sqrt{3}, 2) = (1, \sqrt{3}, 0)$.

(c) Area of the cyllinder surface Y_S:

$$\text{Area}(Y_S) = \iint_{Y_S} dS = \int_{s=0}^{2\pi} \int_{t=0}^{3} |\vec{n}_{Y_S}| ds \; dt = 12\pi, \tag{9.2}$$

because $|\vec{n}_{Y_S}| = |(2\cos s, 2\sin s, t)| = 2$.

(d) With parameters x and z, we have

$$\vec{c}(x,z) = (x, \sqrt{4-x^2}, z), \quad 0 \le x \le 2, \quad 0 \le z \le 3.$$

In the same way as in (b), we find a normal vector through the cross product between the two corresponding tangents $\vec{c}_z{}' = (0,0,1)$ and $\vec{c}_x{}' = (1, -x/\sqrt{4-x^2}, 0)$, that is

$$\begin{aligned} \vec{n} = \vec{c}_z{}'(x,z) \times \vec{c}_x{}'(x,z) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} & 0 \end{vmatrix} \\ &= (\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}, 1, 0) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}(x, \sqrt{4-x^2}, 0). \end{aligned}$$

The normal vector $\vec{n}(1,\sqrt{3},2) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,\sqrt{3},0)$. Compared to the result of (b), the normal vectors are in the same direction but with different length.

Oppgave 3

La C være den positivt orienterte randen til området som er avgrenset av kurvene $y = x^2$ og $y = \sqrt{x}$. Beregn kurveintegralet

$$\oint_C [2xy - x^2 + y\sin(xy)]\ dx + [x + y^2 + x\sin(xy)]\ dy.$$

Solution to Opp. 3:

The curve C is closed and oriented as shown, enclosing the region S. Let $P = 2xy - x^2 + y\sin(xy)$ and $Q = x + y^2 + x\sin(xy)$, clearly, P and Q are both continuously differentiable. We can apply Green's theorem, by which, we have

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_S (\partial_x Q - \partial_y P)\,dx\,dy.$$

Instead of evaluating the left-hand side, we evaluate the right-hand side. We calculate $\partial_x Q = 1 + \sin(xy) + xy\cos(xy)$ and $\partial_y P = 2x + \sin(xy) + xy\cos(xy)$ proceed by writing

$$\begin{aligned} \oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_S &(\partial_x Q - \partial_y P)\,dx\,dy \\ &= \iint_S (1 + \sin(xy) + xy\cos(xy)) - (2x + \sin(xy) + xy\cos(xy))\,dxdy \\ &= \iint_S (1-2x)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1-2x)\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 (1-2x)(\sqrt{x} - x^2)\,dx = \int_0^1 \sqrt{x} - 2x^{\frac{3}{2}} - x^2 + 2x^3\,dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

Oppgave 4

En væske har konstant massetetthet ρ_0 kg/m^3 og hastighetsfelt

$$\vec{v} = (x^2 - y^2, 2xy, z) \text{ m/s}.$$

Netto masse som strømmer ut per tidsenhet gjennom overflaten til det sylindriske legemet

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad -1 \leq z \leq 1,$$

kan skrives som

$$\Phi_M = \oiint_S \rho_0 \vec{v} \cdot \vec{n} dS,$$

der S er overflaten og $\vec{n}$ er enhetsnormalvektoren på overflaten. Forklar hvorfor.

Beregn Φ_M.

Solution to Opp. 4:

Mass density ρ_0 kg/m^3 times velocity vector $\vec{v}$ m/s gives $\rho_0\vec{v}\,\text{kg}/(\text{m}^2\text{s})$, which is a vector valued function giving the amount of fluid mass per area flowing in the direction of $\vec{v}$, per unit of time. Multiplying it with the oriented differential area $d\vec{S} = \vec{n}\,dS$, we get $\rho_0\vec{v}\cdot\vec{n}\,dS$, which is the differential amount of fluid mass passing through the surface S in the normal direction $\vec{n}$, per unit of time.

$$\underbrace{\Phi_M}_{\text{kg/s}} = \oiint_S \underbrace{\rho_0}_{\text{kg/m}^3} \underbrace{\vec{v}}_{\text{m/s}} \cdot \vec{n} \underbrace{dS}_{\text{m}^2}$$

Further, integrating it over the surface S we get the net amount of fluid mass passing through the closed surface per unit of time.

Using the Gauss divergence theorem, we can rewrite this net amount of fluid mass flowing through the closed surface S, as

$$\Phi_M = \oiint_S \rho_0 \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \rho_0 \nabla \cdot \vec{v} dV.$$

Which is calculated as

$$\begin{aligned} Phi_M &= \rho_0 \iiint_V \nabla \cdot (x^2 - y^2, 2xy, z)\, dV \\ &= \rho_0 \iiint_V (2x + 2x + 1)\ dV \\ &= \rho_0 \iiint_V 4x dV + \rho_0 \iiint_V 1 dV \end{aligned} \tag{9.3}$$

Observe that in the first integral in eq. (9.3), we need to integrate an odd function over a domain which is symmetric about the y-axis; clearly the result is 0. Therefore, the calclation yields

$$\Phi_M = \rho_0 \iiint_V 1\, dV = \rho_0 \operatorname{vol}(V) = \rho_0 \pi * 1^2 * 2 = 2\pi\rho_0.$$

9.3 Fasit-Våren 2016

Oppgave 1

(a) Vis at vektorfeltet $\vec{F}$ gitt ved $\vec{F}(x,y,z) = (1+y^2, 2xy+z^2, 2yz)$ er konservativt, og finn en potensialfunksjon til $\vec{F}$.

solution: To show that the field is conservative is enough to show that the field is curl-free.

$$\nabla \times \mathbf{F} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \times (1+y^2, 2xy+z^2, 2yz) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 1+y^2 & 2xy+z^2 & 2yz \end{vmatrix} = 0\mathbf{i}+0\mathbf{j}+0\mathbf{k}.$$

The conservative field can be looked as the gradient of a potential function g, which can be formulated as

$$\nabla g = \mathbf{F} = (1+y^2, 2xy+z^2, 2yz).$$

So, it follows

$$\begin{cases} \partial_x g = 1+y^2 \\ \partial_y g = 2xy+z^2 \\ \partial_z g = 2yz \end{cases}$$

Taking the integral of above equations, one gets

$$\begin{cases} g = x + xy^2 + C_1(y,z) \\ g = xy^2 + yz^2 + C_2(x,z) \\ g = yz^2 + C_3(x,y) \end{cases}$$

The above three formulas should have the same form since that they express the same function g. Therefore, comparing first two formulas, we can find that $C_1(y,z)$ should be the combination of term yz^2 and some constant C since that $C_1(y,z)$ is a function of y and z but not x. In the same way, we find the expressions for $C_2(x,z)$ and $C_3(x,y)$, respectively.

$$\begin{cases} C_1(y,z) = yz^2 + C \\ C_2(x,z) = x + C \\ C_3(x,y) = x + xy^2 + C \end{cases}$$

Concequently, the potential function is $g = x + xy^2 + yz^2 + C$.

(b) Hva vet vi om kurveintegraler til et konservativt vektorfelt?

Gitt $\vec{F}$ som i (a), beregn kurveintegralet

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

langs kurven C som er parametrisert ved $\vec{c}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ for $0 \le t \le 2\pi$.

solution: The line integral over a conservative field is only dependent on the potential value start and end positions:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = g(2\pi) - g(0) = (1 + 1 \cdot 0^2 + 0 \cdot (2\pi)^2) - (1 + 1 \cdot 0^2 + 0 \cdot 0^2) = 0.$$

Alternatively, we might use direct integral as

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} (1 + \sin^2(t), 2\cos(t)\sin(t) + t^2, 2t\sin(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t), 1)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin(t) - \sin^3(t) + 2\cos^2(t)\sin(t) + t^2\cos(t) + 2t\sin(t))\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (t^2\cos(t) + 2t\sin(t))\, dt = \int_0^{2\pi} d(t^2 \sin t) = 0.\end{aligned}$$

comments:

1. Integral of $\sin(t)$ and $\sin^3(t)$ are both 0, since the area above and below the x-axis are the same.
2. By substitution: $x = \cos(t)$, $x' = -\sin(t)$, and hence $\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\sin(t)\, dt = \int_1^1 -x^2 dx = 0$.
3. $d(t^2 \sin(t)) = 2t\sin(t)\, dt + t^2\cos(t)\, dt$.

Oppgave 2

(a) La f være funksjonen gitt ved $f(x, y, z) = \cos x + e^{3yz}$. I hvilken retning blir den retningsderiverte til f størst i punktet $(\pi,\ 0,\ 1)$? Begrunn svaret.

Regn ut den retningsderiverte i punktet $(\pi,\ 0,\ 1)$ i den retningen.

solution: We know that the gradient direction is the direction in which the directional derivative is the largest. The gradient of f is given by

$$\nabla f = (-\sin x, 3ze^{3yz}, 3ye^{3yz}).$$

So at the point $(\pi, 0, 1)$ the direction with the largest directional derivative is given by the direction/vector:

$$\nabla f(\pi, 0, 1) = (0, 3, 0).$$

The directional derivative in this direction, is the scalar product between $\nabla f(\pi, 0, 1)$ and the unit vector in the direction of $(0, 3, 0)$, that is:

$$\nabla f(\pi, 0, 1) \cdot (0, 1, 0) = (0, 3, 0) \cdot (0, 1, 0) = 0 + 3 + 0 = 3.$$

The directional derivative in the gradient direction is **also** given by the norm of the gradient, that is:

$$|\nabla f(\pi, 0, 1)| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 0^2} = 3.$$

(b) La C være den plane kurven gitt ved parameterfremstillingen:

$$\vec{c}(t) = (3(t-1)^2, 2(2t-1)^{\frac{3}{2}}) \quad \text{for} \quad 1 \leq t \leq 5.$$

Finn lengden av kurven.

solution: The derivative of $\mathbf{c}(t)$ is

$$\mathbf{c}'(t) = (6(t-1), 6(2t-1)^{\frac{1}{2}}).$$

So, the length is

$$\int_1^5 |\mathbf{c}'| \, dt = \int_1^5 |(6(t-1), 6(2t-1)^{\frac{1}{2}})| \, dt = 6 \int_1^5 t \, dt = 72.$$

Oppgave 3

La S være flaten gitt ved

$$2z = x^2 + y^2 \quad \text{og} \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

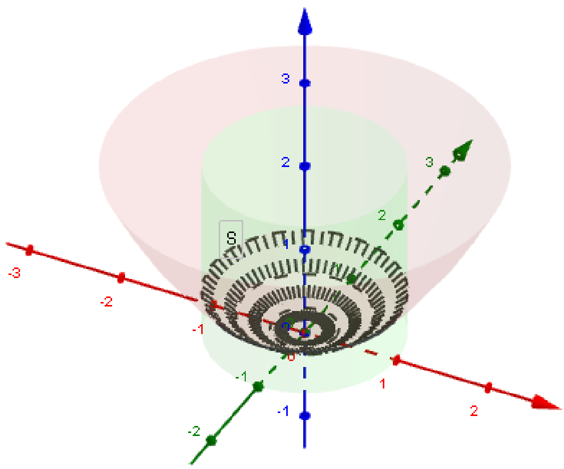
der x, y og z er lengder målt i meter.

(a) Lag en skisse av flaten S. Vis at

$$\vec{c}(s,t) = (s\cos t, s\sin t, s^2/2), \quad \text{der} \quad 0 \leq s \leq 1 \quad \text{og} \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

er en parameterfremstilling av flaten.

Finnes det en annen måte å parametrisere S på? Begrunn svaret.



solution:

Figur 22: Sketch of 3(a)

The given parametrization is a correct one if you can show that, for (s, t) ranging in the given set: $0 \leq s \leq 1$ and $0 \leq t \leq 2\pi$, the given $c(s, t)$ will indeed cover all the points on the given surface.

Easy to see $x = s\cos t$ and $y = s\sin t$ with $0 \leq s \leq 1$ and $0 \leq t \leq 2\pi$ will give you all the points in the disk $x^2 + y^2 \leq 1$. Next, letting $z = s^2/2$ will give you just the right height to reach all the points on the given surface. This is because with $x = s\cos t$ and $y = s\sin t$, we get $z = (x^2 + y^2)/2$ which is the same as $2z = x^2 + y^2$.

There are many ways to formulate the parametrization, for instance, we can use x and y as parameters directly, namely: $c(x, y) = (x, y, (x^2 + y^2)/2)$ with $x^2 + y^2 \leq 1$.

(b) Bruk en av parameterfremstillingene til å finne enhetsnormalvektoren $\vec{N}$ til flaten S.

Kan en finne enhetsnormalvektoren N på en annen måte her? Begrunn svaret.

solution: Choose the parametrization

$$\mathbf{c}(s, t) = (s\cos t, s\sin t, s^2/2), \quad \text{der} \;\; 0 \leq s \leq 1 \;\; \text{og} \;\; 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Then, the normal vector can be found by a cross product, which is directly based on the fact that a normal vector is perpendicular to the tangent plane.

$$\mathbf{n} = \mathbf{c}_s \times \mathbf{c}_t = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos t & \sin t & s \\ -s\sin t & s\cos t & 0 \end{vmatrix} = -s^2 \cos t\mathbf{i} - s^2 \sin t\mathbf{j} + s\mathbf{k}.$$

The unit vector is then

$$\mathbf{N} = \frac{(-s^2\cos t, -s^2\sin t, s)}{|(-s^2\cos t, -s^2\sin t, s)|} = \frac{(-s^2\cos t, -s^2\sin t, s)}{s\sqrt{1+s^2}} = \frac{(-s\cos t, -s\sin t, 1)}{\sqrt{1+s^2}}.$$

Of course, the other normal vector $-\mathbf{N}$ points the opposite direction.

comment:

Another way to find the unit normal vector is to consider the function

$$F(x, y, z) = 2z - x^2 - y^2$$

and then finding ∇F and normalizing it. The method is based on the fact that the gradient of the level surface is perpendicular to the surface.

(c) Regn ut arealet

$$\iint_S dS$$

til flaten S.

solution: The area can be calculated as

$$A(S) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} |\mathbf{n}|\, dt\, ds = \int_0^1 \int_0^{2\pi} s\sqrt{1+s^2}\, dt\, ds = \int_0^1 2\pi s\sqrt{1+s^2}\, ds.$$

A change of variables to $u = 1+s^2$, and using $du = 2s\, ds$, one gets

$$A(S) = \int_1^2 \pi\sqrt{u} du = \frac{2}{3}\pi u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = \frac{2}{3}\pi(2^{\frac{3}{2}} - 1).$$

Oppgave 4

(a) La $\vec{u}$ være hastighetsfeltet gitt ved $\vec{u} = r\vec{r}$, der $\vec{r} = (x, y, z)$ og $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Avgjør hvilke av følgende uttrykk som har mening og beregn disse:

i) div(div $\vec{u}$) ii) grad(div $\vec{u}$) iii) curl(div $\vec{u}$) iv) curl(curl $\vec{u}$).

solution: The divergence of a vector is a scalar, and it is not possible to take the divergence of a scalar. It is also not possible to calculate the curl of a scalar. But, (ii) and (iv) can be calculated.

$$\begin{aligned}
\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) &= \nabla\left(\nabla \cdot \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2} \cdot x, \sqrt{x^2+y^2+z^2} \cdot y, \sqrt{x^2+y^2+z^2} \cdot z\right)\right) \\
&= \nabla\left(3\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\
&= \nabla\left(4\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = 4\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) &= \nabla \times \left(\nabla \times \left(x\sqrt{x^2+y^2+z^2}, y\sqrt{x^2+y^2+z^2}, z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\right) \\
&= \nabla \times \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} \cdot x & \sqrt{x^2+y^2+z^2} \cdot y & \sqrt{x^2+y^2+z^2} \cdot z \end{vmatrix} \\
&= \nabla \times (0,0,0) = (0,0,0).
\end{aligned}$$

(b) Regn ut fluksen av vektorfeltet

$$\vec{F}(x, y, z) = (g(x, y) + xz, h(x, y) + yz, 1)$$

gjennom flaten S som er gitt ved $2z = x^2+y^2$ og $0 \le z \le \frac{1}{2}$, og som er orientert slik at normalen har positiv z-koordinat. Det vi ellers vet om g og h er at g ikke endrer seg i x-retningen og at h ikke endrer seg i y-retningen.

solution: Three alternatives are presented. Alternative 2 is arguably the easiest one.

Alternative 1

The surface S is actually the same as in Opp. 3. Let V be the object part of enclosed by the surface S, the cylinder side, and the $xy-$plane. By the divergence theorem

$$\begin{aligned}\iint_{S_{\text{whole}}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \iiint_V (\nabla\cdot\mathbf{F})\,dV \\ &= \iiint_V (\partial_x,\partial_y,\partial_z)\cdot(g(x,y)+xz, h(x,y)+yz, 1)\,dV \\ &= \iiint_V (z+z+0)\,dV = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{r^2/2} 2zr\,dz\,d\theta\,dr = \frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

Here, $\partial_x g = 0$ and $\partial_y h = 0$ because g and h do not change along the x and $y$direction, respectively.

The flux through the bottom and the cylinder side are:

$$\begin{aligned}\iint_{S_b} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S_b} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA \\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi} (g(x,y)+r\cos\theta, h(x,y)+r\sin\theta, 1)\cdot(0,0,-r)\,d\theta\,dr \\ &= -\pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_{S_s} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S_s} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi} (g(x,y)+\cos\theta z, h(x,y)+\sin\theta z, 1)\cdot(\cos\theta,\sin\theta,0)\,d\theta\,dz \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi} z\,d\theta\,dz = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Set $X =$ wanted flux. Then you get:

$\text{Flux}_{S_{whole}} = X+$ $\text{Flux}_{S_b}+$ $\text{Flux}_{S_s} \Leftrightarrow \pi/12 = X + (-\pi) + \pi/4$ giving $X = \pi/12 + \pi - \pi/4 = 5\pi/6$

Note: we define the outward direction is the positive direction, i.e., at bottom, the $-z$ direction is the positive direction locally.

Alternative 2

Let V be the object part enclosed by S and $z = \frac{1}{2}$. We let S_{top} be the circle $\{(x,y,z) \mid z = 1/2, x^2+y^2 = 1\}$. By the divergence theorem, we have

$$\iiint_V (\nabla\cdot\mathbf{F})\,dV = \iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_{\text{top}}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}.$$

In words, the total divergence is the volume enclosed by S and the top lid S_{top} equals sum of the outward flux integrated over S and S_{top}. Our approach is as follows: we'll compute the divergence integrated over the volume, and the outward flux through S_{top}. Then we'll solve for the outward flux through S, and multiply by -1 to obtain the inward flux, which is what the problem asked for. If you are confused, please draw the surfaces.

We'll compute divergence integrated over the volume first. We get

$$\begin{aligned}\iiint_V (\nabla\cdot\mathbf{F})\,dV &= \iiint_V (\partial_x,\partial_y,\partial_z)\cdot(g(x,y)+xz, h(x,y)+yz, 1)\,dV\\ &= \iiint_V (z+z+0)\,dV = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_{r^2/2}^{1/2} 2zr\,dz\,d\theta\,dr\\ &= \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

The flux through the top is π, which is the same as that through the bottom in the Alternative 1(the sign is different due to the positive directions are opposite for these two cases). We now know that

$$\underbrace{\iiint_V (\nabla\cdot\mathbf{F})\,dV}_{\pi/6} = \iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \underbrace{\iint_{S_{\text{top}}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}}_{\pi},$$

and solving for the unknown yields $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = -5\pi/6$. But the problem asked for the *inward* flux, since the normal vector has a positive z-component. We have computed the *outward* flux, so we multiply by -1 and give our final answer, which is $5\pi/6$.

Alternative 3 The direct integral, gives the same result:

$$\begin{aligned}&\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}\\ =\ &\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dA\\ =\ &\int_0^1\int_0^{2\pi} (g(y)+r\cos\theta\frac{r^2}{2}, h(x)+r\sin\theta\frac{r^2}{2}, 1)\cdot(-r^2\cos\theta, -r^2\sin\theta, r)d\theta dr\\ =\ &\int_0^1\int_0^{2\pi} -g(r\sin\theta)r^2\cos\theta - h(r\cos\theta)r^2\sin\theta d\theta dr + \int_0^1\int_0^{2\pi} r-\frac{r^5}{2}d\theta dr\\ =\ &\int_0^1\int_0^{2\pi} -g(r\sin\theta)r^2\cos\theta - h(r\cos\theta)r^2\sin\theta d\theta dr + \frac{5\pi}{6}\end{aligned}$$

Setting $u=\sin\theta$ and $v=\cos\theta$, respectively,

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \int_0^1\int_0^0 -g(ru)r^2dudr + \int_0^1\int_1^1 h(rv)r^2dvdr + \frac{5\pi}{6}\\ &= 0+0+\frac{5\pi}{6}\end{aligned}$$

comment: Given that the function g does not change along $x-$direction and the function h does not change along $y-$direction, we get that g is a function of y, namely, $g(y)$, and h is a function of x, that is $h(x)$.

9.4 Fasit - Høsten 2015

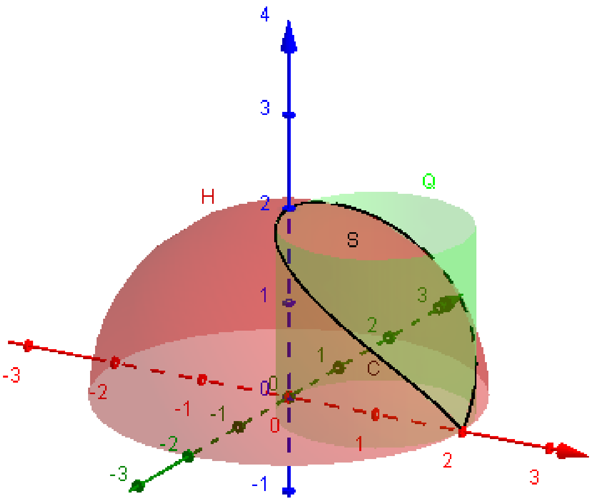
Oppgave 1

Gitt halvkulen H ved $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ og $z \geq 0$, og sylinderen Q ved $x^2 + y^2 = 2x$ [5]. Betrakt S den delen av halvkuleoverflaten som er kuttet av sylinderen. La C være randen til S.

(a) Lag en skisse som viser H, Q, S og C.

Finn en parameterframstilling til kurven C. Finn lengden av kurven.

solution:



Figur 23: Sketch of 1(a)

Parameterization of the curve C:

$$\vec{r} = (1 + \cos\theta, \sin\theta, \sqrt{2 - 2\cos\theta}) \quad \text{s.t. } \theta \in [0, 2\pi]$$

Derivative of $\vec{r}$:

$$\vec{r}' = (-\sin\theta, \cos\theta, \frac{\sin\theta}{\sqrt{2 - 2\cos\theta}})$$

Then, the length of the curve is

$$\oint_C ds = \int_0^{2\pi} |\vec{r}'| d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \frac{\sin^2\theta}{2 - 2\cos\theta}} d\theta$$

(b) Gitt vektorfeltet $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}$. Beregn direkte sirkulasjonen

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

[5] Merk at $x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$

langs kurven C i retning mot klokken sett ovenfra [6].

Er $\vec{F}$ konservativt? Begrunn ditt svar.

solution:

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}\cdot\vec{r}' d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (-\sin\theta, 1+\cos\theta, 1)\cdot(-\sin\theta, \cos\theta, \frac{\sin\theta}{\sqrt{2-2\cos\theta}})d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sin^2\theta + \cos\theta + \cos^2\theta + \frac{\sin\theta}{\sqrt{2-2\cos\theta}}d\theta \\
&= 2\pi + 0 + \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{\sqrt{2-2\cos\theta}}d\theta \\
&= 2\pi + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\sqrt{2-2\cos\theta}}d(2-2\cos\theta) \\
&= 2\pi + 0 = 2\pi
\end{aligned}$$

$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{s} \neq 0 \Rightarrow \vec{F}$ is not conservative.

Oppgave 2

La V være området avgrenset av sylinderen $x^2+y^2=1$, og planene $z=1-x$ og $z=0$. La $\vec{F}=(z-y)\vec{i}+e^x\vec{j}+y\vec{k}$ være vektorfeltet som er gitt.

(a) Skisser V og overflatene som avgrenser V.

La S være sylinderoverflaten til V. Finn en parameterframstilling til S.

solution: Parameterization of the surface S: $(\cos\theta, \sin\theta, z)$, where $\theta\in[0,2\pi]$ and $z\in[0, 1-\cos\theta]$.

(b) La $\vec{G}=\nabla\times\vec{F}$ være curlen til $\vec{F}$. Bergen $\vec{G}$. Vis at divergens til G er lik 0.

Finn fluksen til $\vec{G}$ gitt ved

$$\iint_S \vec{G}\cdot d\vec{S},$$

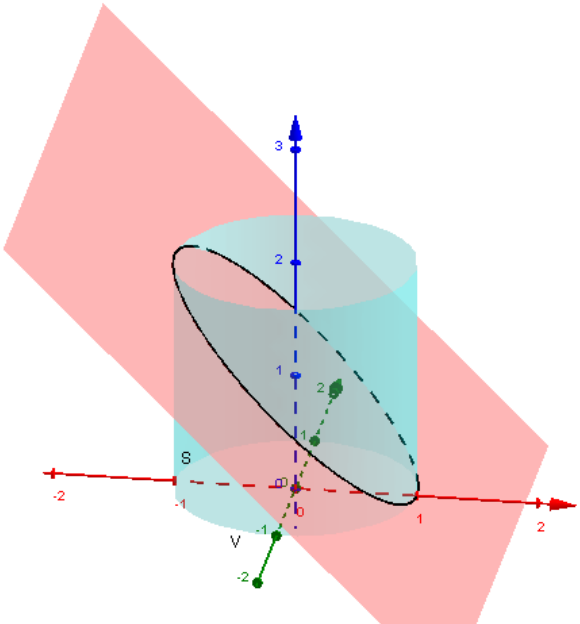
ut gjennom S.

solution:

$$\vec{G}=\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z-y & e^x & y \end{vmatrix} = 1\mathbf{i}+0\mathbf{j}+(e^x+1)\mathbf{k}.$$

$$\nabla\cdot\vec{G}=\partial_x(1)+\partial_y(0)+\partial_z(e^x+1)=0$$

[6] I boken "Analys i flera variablerer det brukt $\vec{F}\cdot d\vec{r}$ i stendet for $\vec{F}\cdot d\vec{s}$



Figur 24: Sketch of 2(a)

$$\vec{N} = \vec{T}_\theta \times \vec{T}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j} + 0\mathbf{k}.$$

So,

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{G}\cdot d\vec{S} &= \iint_A \vec{G}\cdot\vec{N}dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{1-\cos\theta}(1,0,e^x+1)\cdot(\cos\theta,\sin\theta,0)dzd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1-\cos\theta}\cos\theta dzd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)\cos\theta d\theta \\ &= -\pi \end{aligned}$$

Oppgave 3

La $f(x,y,z) = x+y+z$ representere temperaturen på enhetskulen $x^2+y^2+z^2=1$ og i luften rundt enhetskulen.

(a) Finn retningsderiverte til f i et vilkårlig punkt (a,b,c) på enhetskulen, i retning av normal vektoren til enhetskulen i det punktet?

solution: Gradient of f: $\nabla f = (1,1,1)$.

The normal vector $\vec{n}$ at (a,b,c) is (a,b,c) due to that the point is on a unit sphere.

So, the directional derivative is $\nabla f\cdot\vec{n} = (1,1,1)\cdot(a,b,c) = a+b+c$.

(b) Beskriv med ord og med likninger, mengden av punkter (a, b, c) på enhetskulen, der retningsderiverte er lik 0.

solution: The directional derivative is $0 \Rightarrow a + b + c = 0$. Together with $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, one can find the points which are exactly on a circle.

(c) I hvilke punkt på enhetskulen, og retning, vokser eller avtar temperaturen mest?

solution: Because the gradient direction is the change most direction, the temperature changing most when the directional derivative taken in the gradient direction i.e. $(a, b, c) \parallel (1, 1, 1) \Rightarrow (a, b, c) = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$.

9.5 Fasit - Høsten 2015 (ekstra)

No 1 Let C be the intersection of $x^2 + y^2 = 1$ and $z = 1 - x$. Let $\mathbf{F} = (z - y)\mathbf{i} + y\mathbf{k}$.

(a) Calculate $\nabla \times \mathbf{F}$.

s: $\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z - y & 0 & y \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

(b) Calculate $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ using a parametrization of C and a chosen orientation for C.

s: $\begin{cases} x =: \cos\theta \\ y =: \sin\theta \\ z =: 1 - \cos\theta \end{cases} \Rightarrow \mathbf{r} = (\cos\theta, \sin\theta, 1 - \cos\theta) \Rightarrow \mathbf{r}' = (-\sin\theta, \cos\theta, \sin\theta)$,

where. $\theta \in [0, 2\pi]$,counterclockwise.

so,$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' d\theta = \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta - \sin\theta, 0, \sin\theta) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, \sin\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (-\sin\theta + \sin\theta\cos\theta + 2\sin^2\theta) d\theta = 0 + 0 + 2 * 2\pi/2 = 2\pi$

(c) If S is the enclosed flat surface by C(counterclockwise orientation viewed from above), calculate flux of $\nabla \times \mathbf{F}$ over S.

s: $\begin{cases} x =: r\cos\theta \\ y =: r\sin\theta \\ z =: 1 - r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \mathbf{T}_r = (\cos\theta, \sin\theta, -\cos\theta)$ and $\mathbf{T}_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, r\sin\theta)$

$\Rightarrow \mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & -\cos\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & r\sin\theta \end{vmatrix} = r\mathbf{i} + r\mathbf{k}$

so, $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1, 1, 1) \cdot (r, 0, r) d\theta dr = 2 * 2\pi * 1/2 = 2\pi$

(d) If V is the volume bounded by $x^2 + y^2 = 1$ and $z = 1 - x$ and $z = 0$, calculate outward flux of $\nabla \times \mathbf{F}$ over $\tilde{S}$, where $\tilde{S}$ is the surfaces of V.

s: on the side S_s, $\begin{cases} x =: \cos\theta \\ y =: \sin\theta \\ z =: l \end{cases} \Rightarrow \mathbf{T}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$ and $\mathbf{T}_l = (0,0,1)$

$\Rightarrow \mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_l = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$

so, $\iint_{S_s}(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{1-\cos\theta}(1,1,1) \cdot (\cos\theta, \sin\theta, 0)dld\theta = \int_0^{2\pi}(1 - \cos\theta)(\cos\theta + \sin\theta)d\theta = -\pi$

on the bottom S_b, $\mathbf{N} = (0,0,-1)$and$S = \pi \Rightarrow \iint_{S_b}(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{N}dS = \iint_{S_b}(1,1,1)\cdot(0,0,-1)dS = -S = -\pi$

$\Rightarrow$ Flux(S_b) + Flux(S_s) = $-$Flux(S) = $-2\pi \Rightarrow$ Total Flux = 0

No 2 Let $\mathbf{G}(x,y) = (xe^{x^2+y^2} + 3x^2y)\mathbf{i} + (ye^{x^2+y^2} + x^3)\mathbf{j}$.

(a) Show that $\mathbf{G} = \nabla f$ for some f; find such an f.

s: $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xye^{x^2+y^2} + 3x^2$
$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xye^{x^2+y^2} + 3x^2$

$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow$ Conservative Field $\Rightarrow$ There is a potential function f s.t. $\mathbf{G} = \nabla f$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = xe^{x^2+y^2} + 3x^2y \Rightarrow f = \frac{1}{2}e^{x^2+y^2} + x^3y + C(y)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = ye^{x^2+y^2} + x^3 \Rightarrow f = \frac{1}{2}e^{x^2+y^2} + x^3y + C(x)$

$\Rightarrow f = \frac{1}{2}e^{x^2+y^2} + x^3y + C$

(b) Use (a) to show that the line integral of $\mathbf{G}$ around the edge of the triangle with vertices $(0,0)$,$(0,3)$,$(3,0)$ is zero.

s: $\oint \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^3 ye^{y^2}dy$
$+ \int_0^3(xe^{x^2+(3-x)^2} + 3x^2(3-x), (3-x)e^{x^2+(3-x)^2} + x^3) \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})dx + \int_3^0 xe^{x^2}dx$
$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^3(xe^{x^2+(3-x)^2} + 3x^2(3-x) - (3-x)e^{x^2+(3-x)^2} - x^3)dx$
$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^3((2x-3)e^{x^2+(3-x)^2} + 9x^2 - 4x^3)dx$
$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^3(2x-3)e^{\frac{(2x-3)^2}{2}+\frac{9}{2}}dx + 0$
$= 0$

(c) State Green's theorem for the triangle in (b) and a vector field $\mathbf{F}$ and verify it for the vector field $\mathbf{G}$ above.

s: $\oint \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s} = \int_s Pdx + Qdy = \iint_S(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$

Here, $\iint_S(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \iint_S 0dxdy = 0$. Holds!

No 3 Let $\mathbf{F}(x,y) = (2y^3 - 5y)\mathbf{i} + (4x - x^3)\mathbf{j}$.

(a) Let C be the intersection of $z = 9 - 3x^2 - 6y^2$ and $z = 1$, calculate $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ with Greens Theorem.

s: $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$
$= \iint_S (4-3x^2-(6y^2-5))dxdy = \iint_S (9-3x^2-6y^2)dxdy$

$$\begin{cases} z = 9-3x^2-6y^2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow 3x^2+6y^2 = 8 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{r}{\sqrt{3}}\cos\theta \\ y = \frac{r}{\sqrt{6}}\sin\theta \end{cases}$$

where, $\theta \in [0, 2\pi]$ and $r \in [0, \sqrt{8}]$.

$$\Rightarrow J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta & -\frac{r}{\sqrt{3}}\sin\theta \\ \frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta & \frac{r}{\sqrt{6}}\cos\theta \end{vmatrix} = \frac{r}{3\sqrt{2}}$$

$\iint_S (9-3x^2-6y^2)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}} (9-r^2)\frac{r}{3\sqrt{2}}drd\theta$
$= \frac{2\pi}{3\sqrt{2}}(\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4})|_0^{\sqrt{8}} = \frac{20\sqrt{2}\pi}{3}$

(b) Calculate sum of volume V_t bounded by $z = 9-3x^2-6y^2$ and $z = 1$ and the V_b of corresponding base (the vertical cylinder connecting top part and xy-plane) above xy-plane.

s: $V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}}\int_0^{9-r^2} dz\frac{r}{3\sqrt{2}}drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}}(9-r^2)\frac{r}{3\sqrt{2}}drd\theta = \frac{20\sqrt{2}\pi}{3}$

(c) Find the $\tilde{C}$ which makes the $\int_{\tilde{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ maximum; Calculate $\int_{\tilde{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$.

s: When $\tilde{C}$ is the intersection of $z = 9-3x^2-6y^2$ and xy-plane, $\int_{\tilde{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ is maximum. The corresponding volume is also the maximum.

$\int_{\tilde{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi}\int_0^3 (9-r^2)\frac{r}{3\sqrt{2}}drd\theta$
$= \frac{2\pi}{3\sqrt{2}}(\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4})|_0^3 = \frac{27\sqrt{2}\pi}{4}$

(d) Calculate the outward flux of $\mathbf{F}$ over the surfaces of V

s: on bottom:

$\mathbf{N} = (0,0,1) \Rightarrow \mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = 0 \Rightarrow$ Flux over S_b is zero.

on top: The normal vector $\mathbf{n}$ of level surface $z-(9-3x^2-6y^2)$ is $(6x, 12y, 1)$

$\Rightarrow \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = (2y^3-5y, 4x-x^3, 0)\cdot(6x, 12y, 1) = 12xy^3 - 30xy + 48xy - 12x^3y = 12xy^3 - 12x^3y + 18xy$

It is symmetric about origin, for both function and integral domain.

$\Rightarrow$ The flux(integral) will be zero over this region.

$\Rightarrow$ Total flux is zero.

No 4 Consider the function $f(x,y,z) = x+y+z$.

(a) What is the directional derivative of f at a point (x_0, y_0, z_0) on the unit sphere $x^2+y^2+z^2 = 1$ along the unit outer normal vector of the sphere?

s: Gradient of f is $(1,1,1)$. The normal vector of point (x_0, y_0, z_0) on unit sphere is $(2x_0, 2y_0, 2z_0) \Rightarrow \mathbf{N} = (\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}, \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}, \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}) = (x_0, y_0, z_0)$

Directional derivative is $(1,1,1)\cdot(x_0,y_0,z_0)=x_0+y_0+z_0$

(b) Describe in words and by equation the set of points where this directional derivative zero.

s: where the normal vector is perpendicular to gradient

$(x_0,y_0,z_0)\cdot(1,1,1)=0$ i.e. $x_0+y_0+z_0=0$,

and the points should be on the sphere.

$\Rightarrow$ It is a spacial circle $\begin{cases} x_0+y_0+z_0=0 \\ x_0^2+y_0^2+z_0^2=1 \end{cases}$.

(c) At which points of the unit sphere does such a directional derivative attain its maximum/minimum?

s: along ∇f, the maximum is reached, and along $-\nabla f$, the minimum is reached

in concrete, the points are $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ and $-\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

No 5 Let S be the surface given by the parametrization $x=u^2$, $y=u^2\cos v$, $z=u^2\sin v$ for $0\le u\le 1$, $0\le v\le 2\pi$.

(a) Sketch and describe in words the surface S.

s: omit....

(b) Use this parametrization to compute the integrals $\iint_S x^n d\sigma$.

s: $\mathbf{T}_u\times\mathbf{T}_v=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2u & 2u\cos v & 2u\sin v \\ 0 & -u^2\sin v & u^2\cos v \end{vmatrix}=2u^3\mathbf{i}-2u^3\cos v\mathbf{j}-2u^3\sin v\mathbf{k}$

$\iint_S x^n d\sigma=\int_0^{2\pi}\int_0^1 u^{2n}\sqrt{4u^6+4u^6}dudv=4\pi\int_0^1 u^{2n+3}\sqrt{2}du$
$=\frac{4\sqrt{2}\pi}{2n+4}$

No 6 A pair of areas are bounded by $xy-x-y=-\frac{1}{2}$,$xy-x-y=0$, $x^2-y^2-2x+2y=1$ and $x^2-y^2-2x+2y=2$.

(a) Sketch and find the point P about which these areas are symmetric.

s: omit....

(b) The material density is proportional to the square of distance to point P and the ratio is α. Calculate the mass of these areas using new variables $u=x^2-y^2-2x+2y$ and $v=xy-x-y$.

s: $J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2x-2 & -2y+2 \\ y-1 & x-1 \end{vmatrix}=2(x-1)^2++2(y-1)^2$

$M=\int_{-\frac{1}{2}}^0\int_1^2 \alpha((x-1)^2+(y-1)^2)\frac{1}{2(x-1)^2+2(y-1)^2}dudv=\frac{\alpha}{4}$

No 7 Consider the three–dimensional region D given by $x^2+y^2\le z^2+1$ and $x^2+y^2+3z^2\le 5$.

(a) Describe in words and sketch D.

s: omit....

(b) Set up integrals (including appropriate limits) to integrate a function $f(x, y, z)$ on D in cylindrical coordinates.

s: cylindrical coordinates: $\begin{cases} x =: r\cos\theta \\ y =: r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$

Here, $z \in [-1, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ and $r \in [0, \sqrt{z^2+1}]$.

$\Rightarrow \iiint_D f(x, y, z)dxdydz = \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{z^2+1}} f(x(r,\theta), y(r,\theta), z)rdrd\theta dz$
$+ \int_1^{\sqrt{\frac{5}{3}}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{5-3z^2}} f(x(r,\theta), y(r,\theta), z)rdrd\theta dz$
$+ \int_{-\sqrt{\frac{5}{3}}}^{-1}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{5-3z^2}} f(x(r,\theta), y(r,\theta), z)rdrd\theta dz$

No 8 Consider the surface S cut out from the hemisphere $H : x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$, by the cylinder $Q : x^2+y^2 = 2x$. Let C be the boundary of S, oriented counterclockwise when viewed from the top. Compute the circulation of $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k}$ along C.

s: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases} \Rightarrow (1 + \cos\theta, \sin\theta, \sqrt{2 - 2\cos\theta})$

$\Rightarrow \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi}(-\sin\theta, 1 + \cos\theta, 1) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, \frac{\sin\theta}{\sqrt{2-2\cos\theta}})d\theta$
$= 2\pi$