Matematiske utfordringer

Tommy Odland

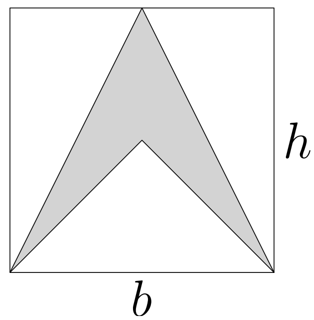
Sist oppdatert: 31. juli 2016

Sammendrag

Dette heftet inneholder utfordrende problemer for elever i ungdomsskolen og videregående skole. Problemene er av varierende vanskelighetsgrad - noen er ganske vanskelige, andre er relativt lette. En del av problemene er basert på problemer som finnes på http://mathschallenge.net. Merk at problemene ikke nødvendigvis er sortert etter vanskelighetsgrad.

Problem 1 *Areal av figur*

(1) Dersom $h = 2$ og $b = 2$, hva er arealet av det grå området i figuren under?
(2) Klarer du å utlede en generell formel, med h og b?



Problem 2 *Antall nitall*

Dersom du skriver ned alle tallene fra 1 til 100, hvor mange ganger skriver du tallet 9?

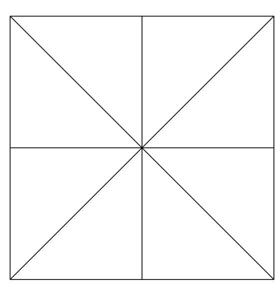
$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots, 100$$

Problem 3 *Kaniner og fugler*

I et bur er det kaniner og fugler. Det er til sammen 10 dyrehoder og 28 dyreføtter i buret. Hvor mange kaniner og fugler er det i buret?

Problem 4 *Trekanter i firkant*

Hvor mange trekanter er det i firkanten under?



Problem 5 *Antall skoler*

Jens, Marte og Elin representerte skolen sin i et langdistanseløp. Jens fullførte i den midterste posisjonen, Marte fullførte etter Jens, på 19. plass, og Elin kom på 28. plass. Hver skole sendte tre deltakere. Hvor mange skoler deltok?

Problem 6 *Sifferprodukt*

Produktet av sifferene i tallet 126 er $1 * 2 * 6 = 12$. Hvor mange andre tall med tre siffere har et sifferprodukt på 12?

Problem 7 *Delelige tall*

Hvor mange tall under 100 er delelige med 2 og 3?

Problem 8 *Delelige summer*

Dersom vi adderer fire tall som kommer etter hverandre, får vi en sum. For eksempel $16+17+18+19 = 70$, som er delelig med 10. Hvor mange tall under 100 som er delelige med 10 kan du lage ved å addere fire tall som kommer etter hverandre?

Problem 9 *Alder*

Når jeg var 14 år gammel var faren min 3 ganger så gammel som meg. Nå er han dobbelt så gammel som meg. Hvor gammel er jeg i nå?

Problem 10 *Produkt av brøk*

Hva er produktet til:

$$\frac{1}{2} * \frac{2}{3} * \frac{3}{4} * \frac{4}{5} * \frac{5}{6} * \frac{6}{7} * \frac{7}{8} * \frac{8}{9} * \frac{9}{10}$$

Problem 11 *Klippe plenen*

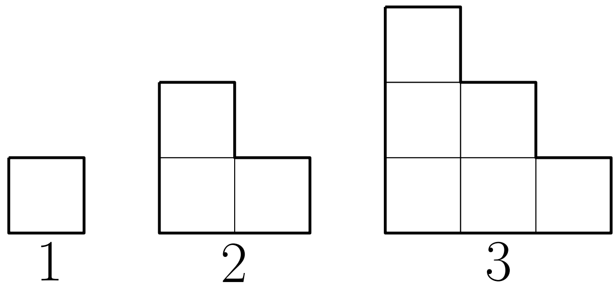
Eirik sin far bruker 20 minutter på å klippe plenen, mens Eirik bruker 30 minutter. Dersom de har to gressklippere og samarbeider, hvor lang tid vil det ta å klippe plenen?

Problem 12 *Antall nitall*

Julie setter seg inn i bilen for å kjøre en tur. Hun legger merke til at bilen totalt har kjørt 13931 kilometer. 13931 er et palindromisk tall, noe som betyr at det leses likt begge veier. Etter to timer kommer hun frem, og hun legger merke til at bilens totale kjørelengde også nå er et palindromisk tall! Hva var gjennomsnittsfarten til Julie?

Problem 13 *Geometrisk sekvens*

Ta en kikk på de 3 første figurene i denne geometriske sekvensen.
Hva er omkretsen til figur nr 10 i denne sekvensen?



Problem 14 *Sum av positive tall*

Summen av de 10 første positive heltallene er lik 55:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$$

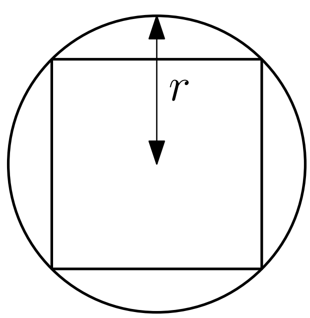
Hva er summen av de første 100 positive heltallene?

Problem 15 *Maksimalt areal*

En bonde har kjøpt 100 meter med gjerde. Han ønsker å lage en inngjerding til dyrene sine som gir mest mulig areal. Hva er maksimalt areal han kan inngjerde?

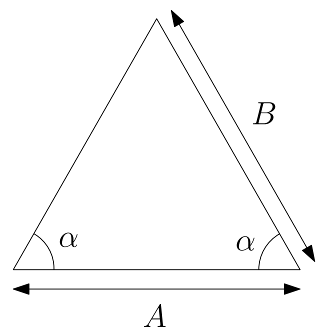
Problem 16 *Sirkel i firkant*

En likesidet firkant er plassert på innsiden av en sirkel. Dersom $r = 5$, hva er arealet til firkanten? Klarer du å finne arealet til firkanten som funksjon av r?



Problem 17 *Areal av trekant*

En likebeint trekant har lengdene $A = 24$ og $B = 37$. Hva er arealet av trekanten?



Problem 18 *Antall fotballkamper*

37 fotballag er med i en turnering. Hvor mange kamper må minimum spilles for å bestemme en vinner av turneringen?

Problem 19 *Prisreduksjon*

Cecilie kjøper et stereoanlegg på 20% salg fra en butikk. Senere selger hun stereoanlegget til Åshild for 60% av prisen hun kjøpte det for. Åshild betaler 1248 kroner for anlegget. Hva var den originale prisen til stereoanlegget?

Problem 20 *Antall håndtrykk*

10 personer møtes på en sosial sammenkomst. Hvor mange håndtrykk må til for at alle skal hilse på hverandre?

Problem 21 *En lineær funksjon*

Lineære funksjoner er alltid på formen:

$$f(x) = A * x + B$$

Den eneste funksjonen som går igjennom punktene (0,0) og (2,2) er:

$$f(x) = 1 * x + 0$$

Hvilken lineær funksjon går gjennom punktene $(-8,-3)$ og $(4,9)$?

Problem 22 *Temperaturmålinger*

Morten måler temperaturen fra mandag til lørdag. Han måler følgende temperaturer:

$$18 + 16 + 22 + 24 + 18 + 21$$

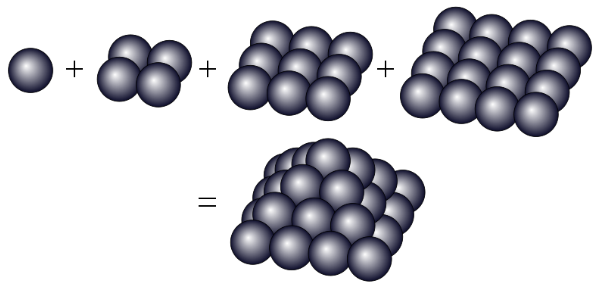
Hva må temperaturen på søndag minst være for at gjennomsnittstemperaturen skal være 20 grader eller mer for denne uka?

Problem 23 *Firkantet pyramide (veldig vanskelig)*

Vi ønsker å lage en firkantet pyramide ved hjelp av kuler. Dersom vi skal ha 4 etasjer, trenger vi 4 kuler:

$$1+4+9+16=30$$

Hvor mange kuler trenger vi dersom vi skal ha 10 etasjer? Hva med 100 etasjer?



Problem 24 *Permutasjoner*

En permutasjon er en re-arrangering av elementer. 2 elementer kan sorteres på 2 måter:

$$AB, BA$$

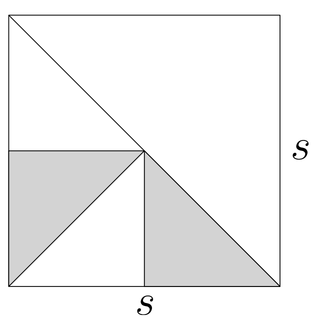
Dersom vi har 3 elementer, kan disse sorteres på 6 måter:

$$ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$$

Hvor mange måter kan man arrangere 6 elementer på?

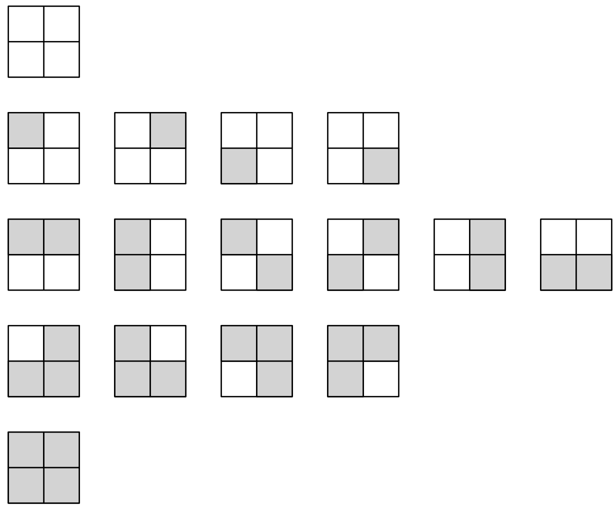
Problem 25 *Areal av område*

Hvor stort er arealet av det skyggelagte området dersom $s = 5$? Klarer du å utlede en generell formel?



Problem 26 *Skyggelegging av firkanter*

Som du ser, kan en $2x2$ firkant skyggelegges på 16 forskjellige måter.
På hvor mange måter kan en $5x5$ firkant skyggelegges?



Problem 27 *Forenkling av brøker*

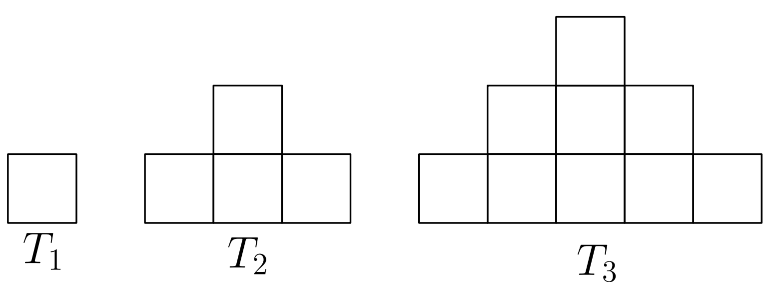
La oss se på brøker $\frac{a}{b}$, der $0 < a < b$ (a er større enn null, og mindre enn b). Dersom $b = 1$, finnes det seks brøker som ikke kan forenkles, disse er:

$$\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$$

Dersom $b = 24$, hvor mange brøker kan ikke forenkles?

Problem 28 *Byggeklosser til tårn*

Vi bygger tårn som på bildet nedenfor. Hvor mange klosser trenger vi for å bygge T_{100}?



Problem 29 *Lengdemåling med hyssing*

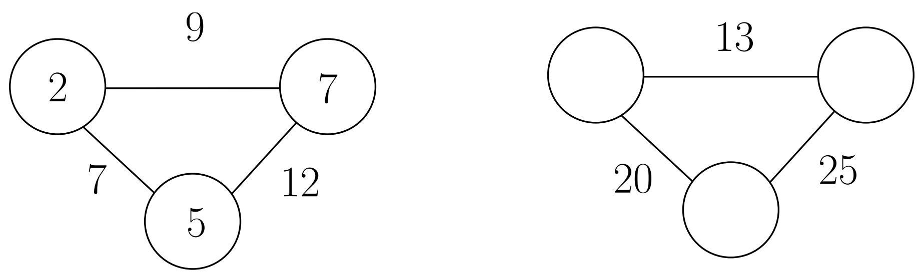
Du har en hyssing som måler $\frac{2}{3}$ meter. Uten å bruke annet måleutstyr,
hvordan kan du bruke hyssingen til å måle $\frac{1}{2}$ meter?

Problem 30 *Pensjonsalder*

Nina startet på skolen når hun var fem år gammel. Hun brukte en fjerdedel av livet sitt på å utdanne seg, og fikk en jobb rett etterpå. Deretter jobbet hun halvparten av livet sitt før brukte fjorten glade år som pensjonist.
Hvor gammel var Nina da hun pensjonerte seg?

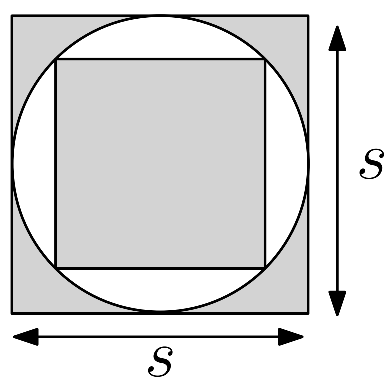
Problem 31 *Trekantartimetikk*

I diagrammet nedenfor til venstre er tallene på linjene som binder sirklene sammen lik summen av sirklene. Hvilke verdier gir en løsning for diagrammet til høyre?



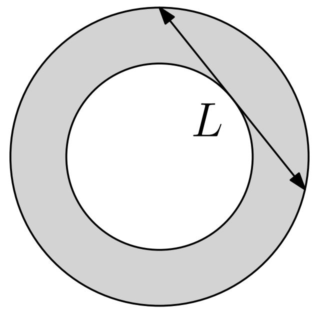
Problem 32 *Areal av sirkel*

Hva er arealet av det hvite området i figuren nedenfor, gitt som funksjon av s?



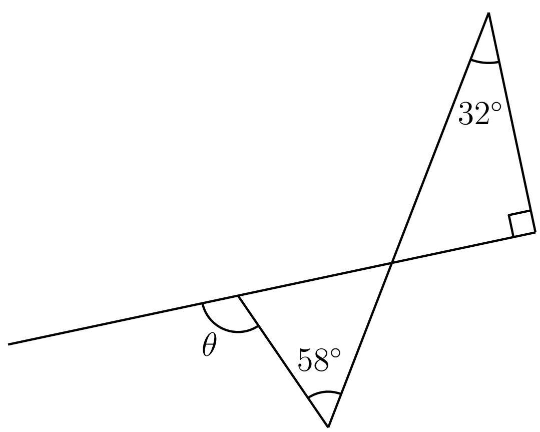
Problem 33 *Areal av ring*

Dersom $L = 10$, hva er arealet av det grå området?



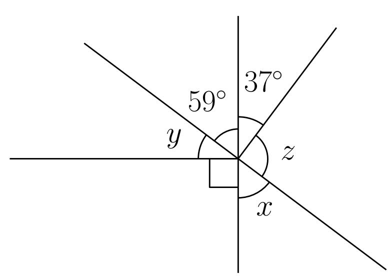
Problem 34 *Vinkelgrader*

Bestem θ i figuren under.



Problem 35 *Vinkelgrader 2*

Bestem x, y og z i figuren under.



Problem 36 *Sum av oddetall*

La oss se på summen av positive oddetall, opp til et tall n:

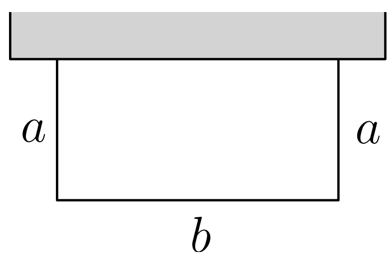
$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + n$$

Utled en formel som gir summen av alle positive oddetall opp til n. Bruk formelen til til å sjekke at følgende er korrekt:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 869 + 871 + 873 = 190969$$

Problem 37 *Maksimalt areal 2*

En bonde skal gjerde inn et område ved siden av en vegg (grått område). Han kjøper inn 100 meter med gjerde. For hvilken lengde a og b blir arealet størst mulig?



Problem 38 *Evige eksponenter*

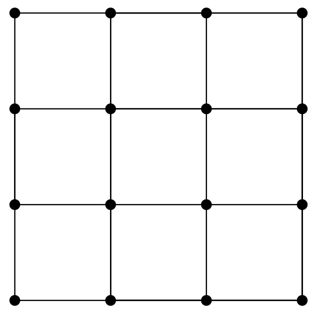
I uttrykket a^b kalles a for basen og b for eksponenten. I likningen under er eksponenten opphøyd i en ny eksponent, og dette mønsteret fortsetter evig!

$$x^{x^{x^{x^{x^{x^{x^{x^{\cdots}}}}}}}} = 2$$

Løs likningen for x.

Problem 39 *Antall linker*

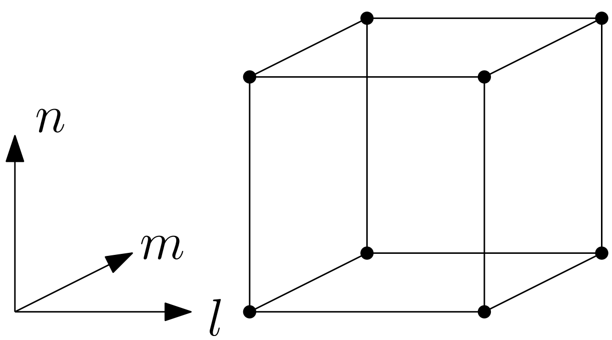
Nedenfor ser du en en firkantet figur med $N \times N$ *noder* og L *linker* mellom dem. Dersom man har $N = 4$, slik som i figuren under, er det $L = 24$ linker mellom dem.



Hvor mange linker L er det dersom $N = 100$? Hva er linker som *funksjon* av noder, $L(N)$?

Problem 40 *Antall linker i 3D*

Nedenfor ser du en kube som med 2 noder i hver retning, der retningene er l, m og n. Vi lar $L(l, m, n)$ være *linker* som funksjon av noder. Som du ser er $L(2, 2, 2) = 12$.



Hvor mange linker L er det dersom $l = 10$, $m = 20$ og $n = 30$?
Hva er linker som *funksjon* av noder $L(l, m, n)$?

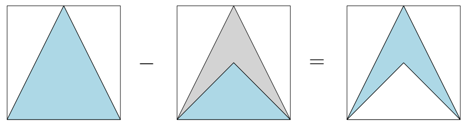
Problem 41 *Optimal stopping i spill*

La oss anta at du ønsker å score så høyt som mulig, gjennomsnittlig, når du spiller følgende spill. Spillet foregår i n runder, og du vet antall runder n før spillet starter. På hver runde får du tildelt et tilfeldig reelt tall mellom 0 og 1 (uniform sannsynlighet). Du kan f.eks få tildelt $\frac{1}{25}$, $\frac{2}{3}$ eller 0.39584. Etter at du har fått tildelt et tall, må du bestemme deg for om du vil spille videre, eller beholde tallet du har fått. Målet er å få så høyt tall som mulig etter n runder. Når bør man gi seg, og når bør man spille videre?
Dersom $n = 1$ har man ikke noe valg – du får det tallet du får, og spillet er ferdig. Dersom $n = 2$ virker det ikke så lurt å spille videre dersom du får 0.9 på første runde, men om du får 0.1 på første runder virker det lurt å spille videre. Hva er den optimale strategien?

Løsning 1 *Areal av figur*

Ta arealet av den store trekanten, og trekk fra arealet til den lille. Da står du igjen med arealet til det grå området.

$$\frac{b*h}{2} - \frac{h}{2}*b*\frac{1}{2} = \frac{b*h}{4}$$



Løsning 2 *Antall nitall*

Vi har to siffere som kan være lik 9:

$$?9 = (09, 19, 29, \ldots, 89, 89) \rightarrow 10$$

$$9? = (91, 92, 93, \ldots, 98, 99) \rightarrow 10$$

$$10 + 10 = 20$$

Løsning 3 *Kaniner og fugler*

Vi lar f være antall fugler og k antall kaniner.

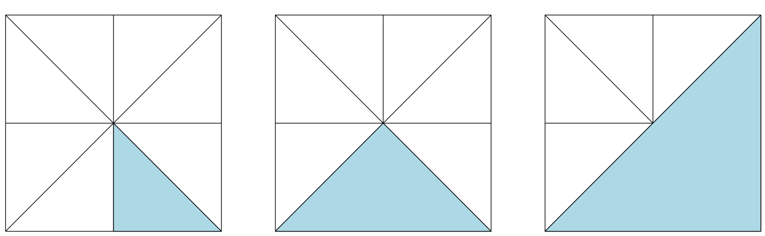
$$f + k = 10$$

$$2f + 4k = 28$$

Løs likningssettet og finn $k = 4$ og $f = 6$.

Løsning 4 *Trekanter i firkant*

$$8 + 4 + 4 = 16$$



8 4 4

Løsning 5 *Antall skoler*

Jens fullførste i den midterste posisjonen → oddetall antall deltakere
Hver skole sendte tre deltakere → delelig på 3
Elin kom på 28. plass → 29 eller flere deltakere

Dersom det var 33 deltakere, er den midterste posisjonen 17. Dersom det var 39 deltakere, er den midterste posisjonen 20. Siden Marte fullførte etter Jens, må svare være 33 deltakere fra 11 skoler.

Løsning 6 *Sifferprodukt*

Kombinasjonene som gir 12 er:

$$(126),(134),(223)$$

(126) kan permuteres på 3! = 6 måter, det samme gjelder for (134).
(223) kan permuteres på $\frac{3!}{2!} = 3$ måter (permutasjon av multiset), svaret er derfor:

$$6+6+3=15$$

Alle mulighetene er:

$$126, 162, 216, 261, 612, 621$$

$$134, 143, 314, 341, 413, 431$$

$$223, 232, 322$$

Løsning 7 *Delelige tall*

Dersom et tall er delelig med 2 og 3, er det delelig med 6.

$$6 * 17 = 102$$

Men $102 > 100$, svaret er derfor 16.

Løsning 8 *Delelige summer*

Dersom vi adderer fire tall som kommer etter hverandre, får vi en sum. For eksempel $16+17+18+19 = 70$, som er delelige med 10. Hvor mange tall under 100 som er delelige med 10 kan du lage ved å addere fire tall som kommer etter hverandre?

Vi ser på summen $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)$:

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3) = 4n+6$$

Dersom $4n+6$ er delelig på 10, $4n$ slutte med sifferet 4. Siste siffer i n må være 1 eller 6.

$$1+2+... = 10$$

$$6+7+... = 30$$

$$11+12+... = 50$$

$$16+17+... = 70$$

$$21+22+... = 90$$

Løsning 9 *Alder*

$14 * 3 = 42$. Faren var med andre ord 42 for a år siden.

$$(14+a) * 2 = (42+a)$$

Løser og finner ut at $a = 14$. Jeg er med andre ord 28 år gammel.
Man kan sette inn og dobbelsjekke dette.

Løsning 10 *Produkt av brøk*

$$\frac{1}{\cancel{2}} * \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} * \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} * ... * \frac{\cancel{9}}{10} = \frac{1}{10}$$

Løsning 11 *Klippe plenen*

Eirik sin far bruker 20 minutter på å klippe plenen, mens Eirik bruker 30 minutter. Eirik sin far klipper da 3 plener på 60 minutter. Eirik klipper 2 plener på 60 minutter. De klipper til sammen 5 plener på 60 minutter, da klipper de 1 plen på 12 minutter.

Løsning 12 *Antall nitall*

Det neste palindromiske tallet er 14041. $14041 - 13931 = 110$.
110 kilometer på 2 timer gir en gjennomsnittsfart på 55 kilometer per time.

Løsning 13 *Geometrisk sekvens*

La $O(k)$ være omkrets som funksjon av klosser. Vi ser at:

$$O(1) = 4$$

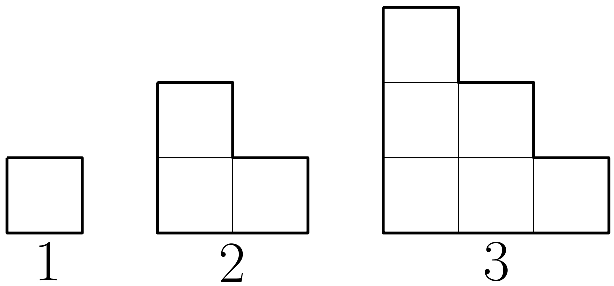
$$O(2) = 8$$

$$O(3) = 12$$

Hver gang legges det på 4. Vi får funksjonen:

$$O(k) = 4k$$

For 10 er omkretsen 40.



Løsning 14 *Sum av positive tall*

Summen av de 10 første positive tallene er lik 55:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 55$$

Hva er summen av de første 100 positive tallene?

I slike problemer er det alltid viktig å begynne med lette eksempler, og prøve å generalisere. Vi kaller summen for S:

$$1+2+3+4+\ldots+(n-1)+n = S$$

$$\begin{aligned} 2S &= (1+2+3+4+\ldots+(n-1)+n) \\ &\quad + (n+(n-1)+\ldots+4+3+2+1) \\ &= (n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1) \\ &= n(n+1) \end{aligned} \tag{1}$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1+2+3+4+\ldots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1+2+3+4+\ldots+99+100 = \frac{100(101)}{2} = 5050$$

Løsning 15 *Maksimalt areal*

Den geometriske figuren som gir mest areal i forhold til omkretsen er en sirkel. Dette er grunnen til at vannrør er sirkulære. Det er også grunnen til at trær er runde, dråper er sirkulære, osv...
Vi vet at $A = \pi r^2$ og at $O = 2r\pi$, derfor:

$$100 = 2r\pi \rightarrow r = \frac{100}{2\pi}$$

$$A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{100}{2\pi}\right)^2 = \frac{100^2}{4\pi}$$

Løsning 16 *Sirkel i firkant*

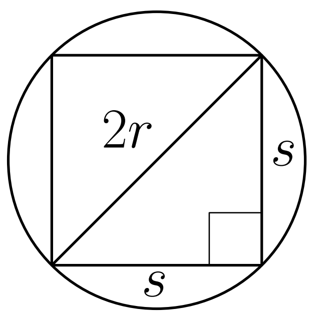
Vi bruker pytagoras:

$$(2r)^2 = s^2 + s^2$$

$$4r^2 = 2s^2 \rightarrow s = \sqrt{2}r$$

$$A = s * s = (\sqrt{2}r) * (\sqrt{2}r) = 2r^2$$

$$A(r) = 2r^2 \rightarrow A(5) = 2(5)^2 = 50$$



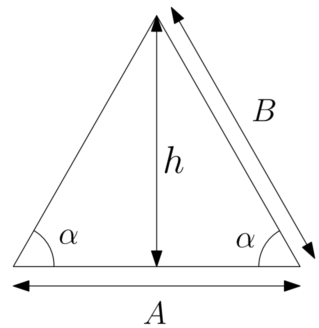
Løsning 17 *Areal av trekant*

En likebeint trekant har lengdene $A = 24$ og $B = 37$. For å finne arealet må vi finne h.

$$Areal = \frac{A * h}{2}$$

$$h^2 + \left(\frac{A}{2}\right)^2 = B^2 \rightarrow h^2 = B^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2 \rightarrow h = \sqrt{B^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2}$$

$$Areal = \frac{A}{2}\sqrt{B^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2} = \frac{24}{2}\sqrt{37^2 - \left(\frac{24}{2}\right)^2} = 12\sqrt{1225} = 420$$



Løsning 18 *Antall fotballkamper*

Dersom 2 lag er med, må 1 kamp spilles.
Dersom 3 lag er med, må 2 kamper spilles.
Dersom 4 lag er med, må 3 kamper spilles.
Dersom n lag er med, må $(n-1)$ kamper spilles.
Dersom 37 lag er med, må 36 kamper spilles.

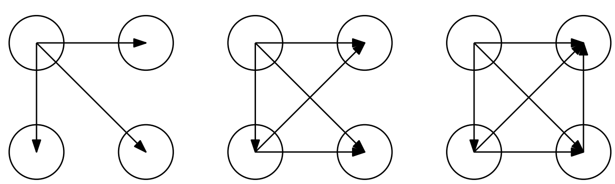
Løsning 19 *Prisreduksjon*

Cecilie kjøper et stereoanlegg på 20% salg fra en butikk. Senere selger hun stereoanlegget til Åshild for 60% av prisen hun kjøpte det for. Åshild betaler 1248 kroner for anlegget. Hva var den originale prisen til stereoanlegget?
La P_O være den originale prisen:

$$P_O * (1-0.2) * 0.6 = 1248$$

$$P_O = \frac{1248}{0.6 * 0.8} = 2600$$

Løsning 20 *Antall håndtrykk*



Dersom det er 4 personer, hilser første person på 3 mennesker. Andre person hilser på 2 mennesker, og tredje person hilser på 1 person.

$$H(4) = 1+2+3$$

Samme tilfellet oppstår når 10 personer hilser:

$$\begin{aligned} H(10) &= 1+2+3+4+5+6+7+8+9 \\ &= (1+9)+(2+8)+(3+7)+(4+6)+5 \\ &= 10+10+10+10+5 \\ &= 45 \end{aligned}$$

Løsning 21 *En lineær funksjon*

Vi skal finne en lineær funksjon på formen $f(x) = A * x + B$ som går gjennom punktene $(-8, -3)$ og $(4, 9)$.

$$A = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-(-8)}{9-(-3)} = \frac{12}{12} = 1$$

$$f(x) = x + B$$

Videre vet vi at $f(4) = 9$, derfor:

$$9 = 4 + B \rightarrow B = 5$$

$$f(x) = x + 5$$

Løsning 22 *Temperaturmålinger*

$$20 = \frac{18+16+22+24+18+21+x}{7}$$

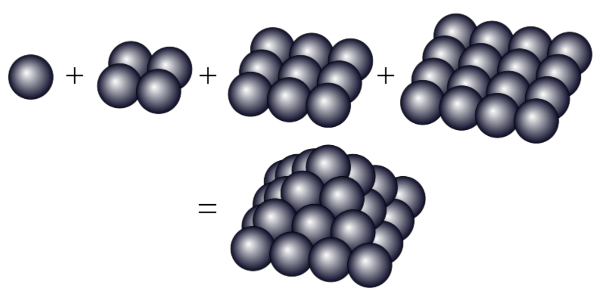
$$20 = \frac{119+x}{7}$$

$$20(7) = 119 + x$$

$$140 - 119 = x$$

$$x \geq 21$$

Løsning 23 *Firkantet pyramide*



$$E(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$E(10) = \sum_{i=1}^{10} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 = \frac{10^3}{3} + \frac{10^2}{2} + \frac{10}{6} = 385$$

Å utlede en generell formel er vanskelig, men det finnes en løsning. Du kan lese mer her:
http://www.trans4mind.com/personal_development/mathematics/series/sumNaturalSquares.htm

Løsning 24 *Permutasjoner*

n elementer kan permuteres på $n!$ måter, der:

$$n! = n * (n-1) * (n-2) * ... * 2 * 1$$

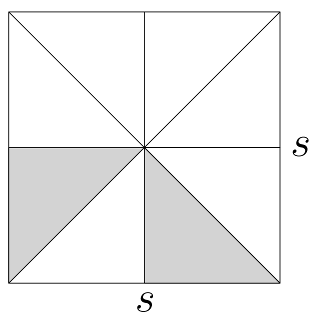
6 elementer kan sorteres på 6! måter:

$$6! = 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 720$$

Løsning 25 *Areal av område*

$$A(s) = \frac{s^2}{4}$$

$$A(5) = \frac{5^2}{4} = \frac{25}{4}$$



Løsning 26 *Skyggelegging av firkanter*

Den geometriske formen har ikke noe å si her. Hver liten firkant kan være skyggelagt, eller ikke skyggelagt. Det eksisterer 2 muligheter per liten firkant. I en firkant som måler $2x2$ er det 4 mindre firkanter. Antall muligheter er da:

$$2 * 2 * 2 * 2 = 2^4 = 16$$

For en $5x5$ firkant er det 25 små firkanter, dvs:

$$2^{25} = 33554432$$

Løsning 27 *Forenkling av brøker*

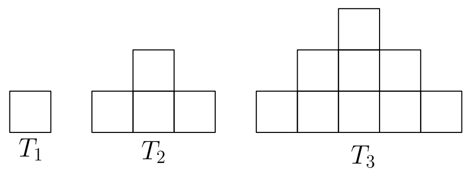
Brøkene kan ikke forenkles dersom a og b er relative primtall. Det betyr at den største felles divisoren er lik 1.

$$\frac{1}{24}, \frac{5}{24}, \frac{7}{24}, \frac{11}{24}, \frac{13}{24}, \frac{17}{24}, \frac{19}{24}, \frac{23}{24}$$

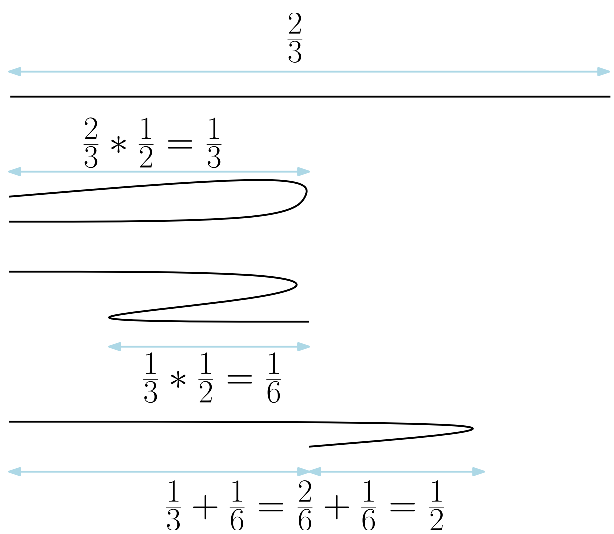
Løsning 28 *Byggeklosser til tårn*

$T_1 = 1,\ T_2 = 1,\ T_3 = 9, \ldots,\ T_n = n^2$

$$T_{100} = 100^2$$



Problem 29 *Lengdemåling med hyssing*



Løsning 30 *Pensjonsalder*

Vi lar L være antall år i livet til Nina.

$$5 + \frac{L}{4} + \frac{L}{2} + 14 = L$$

$$19 = L - \frac{L}{4} - \frac{L}{2}$$

$$19 = \frac{4L}{4} - \frac{L}{4} - \frac{2L}{4}$$

$$19 = \frac{L}{4}$$

$$19(4) = L = 76$$

$$76 - 14 = 62$$

Løsning 31 *Trekantartimetikk*

$$1: a+b=13$$

$$2: a+c=20$$

$$3: c+b=25$$

Vi løser likning 1 og 2 for a.

$$1: a=13-b$$

$$2: a=20-c$$

Setter $a=a$

$$13-b=20-c$$

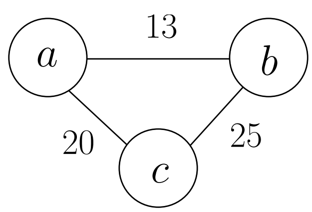
Fra likning 3 vet vi at $c=25-b$

$$13-b=20-(25-b)$$

$$13-b=-5+b$$

$$2b=18 \rightarrow b=9$$

Da kan vi sette inn, og finne ut at $a=4$ og $c=16$.



Løsning 32 *Areal av sirkel*

La A_s være arealet av hele sirkelen, og A_f være arealet av den midterste firkanten. Arealet til det hvite området er da lik $A_s - A_f$.

$$A_s = \pi r^2 = \pi(\frac{s}{2})^2$$

Pytagoras på den midterste firkanten.

$$(2r)^2 = a^2 + a^2$$

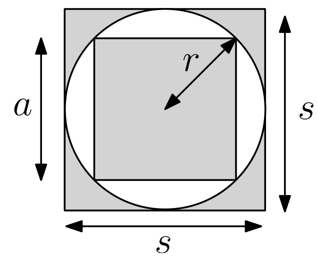
$$4r^2 = 2a^2 \rightarrow a = \sqrt{2}r$$

Men $r = \frac{s}{2}$, derfor

$$a = \sqrt{2}(\frac{s}{2})$$

$$A_f = a^2 = (\sqrt{2}(\frac{s}{2}))^2 = \frac{s^2}{2}$$

$$A_s - A_f = \pi(\frac{s}{2})^2 - \frac{s^2}{2} = \frac{s^2}{2}(\frac{\pi}{2} - 1)$$

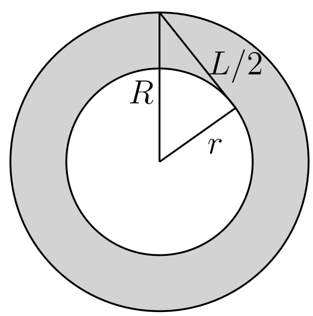


Løsning 33 *Areal av ring*

$$R^2 = r^2 + (\frac{L}{2})^2$$

$$\pi R^2 = \pi r^2 + \pi(\frac{L}{2})^2$$

$$A = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(\frac{L}{2})^2$$



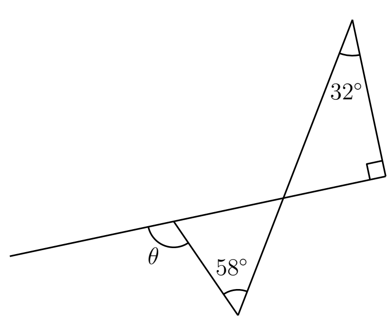
Løsning 34 *Vinkelgrader*

$$\alpha + 32 + 90 = 180 \rightarrow \alpha = 58$$

$$\alpha + 58 + \beta = 180 \rightarrow 58 + 58 + \beta = 180 \beta = 64$$

$$\beta + \theta = 180$$

$$64 + \theta = 180 \rightarrow \theta = 116$$



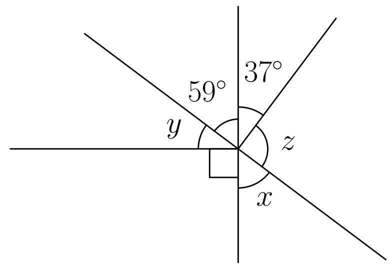
Løsning 35 *Vinkelgrader 2*

$$y + 59 = 90$$

$$y + 90 + x = 180$$

$$59 + 37 + z = 180$$

Løser likningene: $z = 112$, $x = 59$, $y = 31$



Løsning 36 *Sum av oddetall*

La oss se på summen av positive oddetall, opp til et tall n:

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$

$$1 + 3 + 5 + ... + n = (\frac{n+1}{2})^2 = \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$1 + 3 + 5 + ... + 783 = \frac{(874)^2}{4} = 190969$$

Løsning 37 *Maksimalt areal 2*

Vi vet at $a + a + b = 100$, og $A = a * b$. Setter inn:

$$A = a(100 - 2a)$$

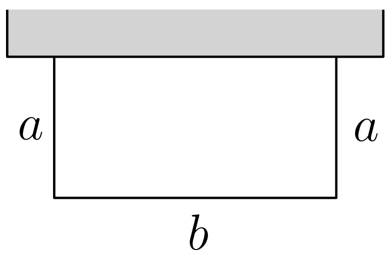
Vi gjør uttrykket til en funksjon, $A(a)$ og sjekker for funksjonens høyeste punkt. Dette kan gjøres i Excel, eller med Google. Vi ser at det høyeste punktet er $a = 25$.
Hva er b når $a = 25$?

$$25 + 25 + b = 100 \rightarrow b = 50$$

Dersom du har lært om derivasjon, kan denne oppgaven løses uten å plotte funksjonen.

$$\frac{dA(a)}{da} = 100 - 4a$$

$$0 = 100 - 4a \rightarrow a = 25$$



Løsning 38 *Evige eksponenter*

$$x^{x^{x^{x^{x^{x^{x^{x^{x^{\cdots}}}}}}}}} = 2$$

$$x^{\left(x^{x^{x^{x^{x^{x^{x^{x^{\cdots}}}}}}}}\right)} = 2$$

Når antall eksponenter går mot evig, er uttrykket i parentes lik 2. Vi setter likningen "inn i seg selv":

$$x^2 = 2$$

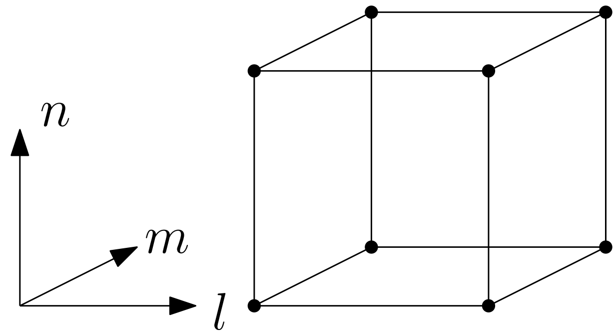
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{2}$$

Løsning 39 *Antall linker*

Linker som funksjon av noder er gitt ved $L(N) = 2N(N-1)$. Vi har $L(100) = 19800$.

Problem 40 *Antall linker i 3D*



En måte å tenke på er å ta et plan om gangen: i et plan er det $n(m-1)+m(n-1)$ linker.
Vi kaller dette for L_p, linker i et plan:

$$L_p = n(m-1) + m(n-1)$$

Videre har vi l plan, pluss de $(l-1)$ områdene mellom de l planene der vi har nm linker:

$$L = L_p l + nm(l-1)$$

Dette kan skrives penere:

$$L(l,m,n) = nl(m-1) + nm(l-1) + ml(n-1)$$

Problem 41 *Optimal stopping i spill*

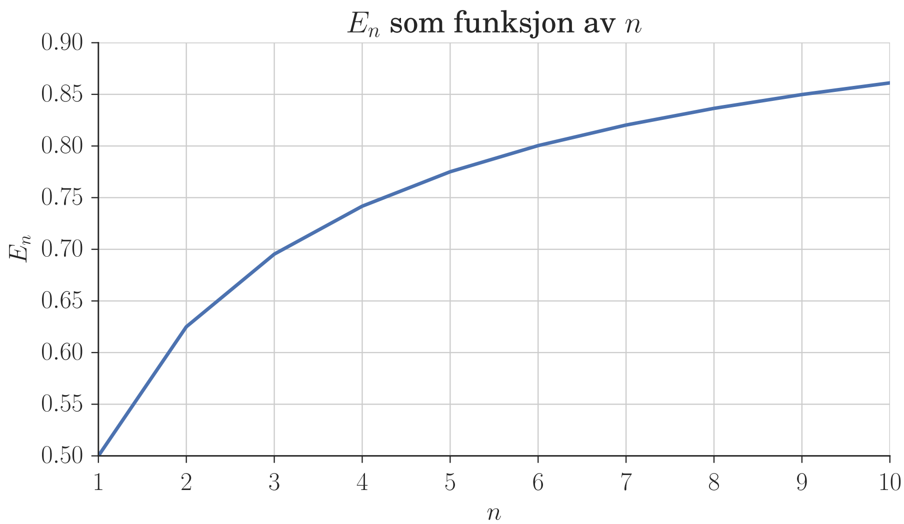
Vi ser på forventningsverdien (gjennomsnittsverdien) E. Dersom vi spiller en runde er vår beste forventning $1/2$. Med andre ord er $E_1 = 1/2$.
Dersom vi spiller 2 runder har vi 2 valg på den første runden: Vi får enten et tall som er mindre enn $1/2$ (det er 50% sjanse for dette), da spiller vi videre. Dersom vi får et tall som er høyere enn $1/2$ be holder vi det, det er 50% sjanse for dette, og forventet verdi blir da midtpunktet mellom $1/2$ og 1, med andre ord $3/4$. Vi får:

$$E_2 = \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}\frac{3}{4} = \frac{5}{8}$$

Argumentet kan gjentas rekursivt, og vi får:

$$E_n = (1 - E_{n-1})(1 + E_{n-1})\frac{1}{2} + E_{n-1}^2 = \frac{1 + E_{n-1}^2}{2}$$

Med startverdi $E_1 = 1/2$. Dersom vi får en verdi som er høyere enn E_n stopper vi. Her er noen verdier:
$E_1 = \frac{1}{2}$, $E_2 = \frac{5}{8}$, $E_3 = \frac{89}{128}$, $E_4 = \frac{24305}{32768}$, $E_5 = \frac{1664474849}{2147483648}$, $E_\infty = 1$


E_n som funksjon av n
0.90
0.85
0.80
0.75
0.70
0.65
0.60
0.55
0.50
E_n
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
n