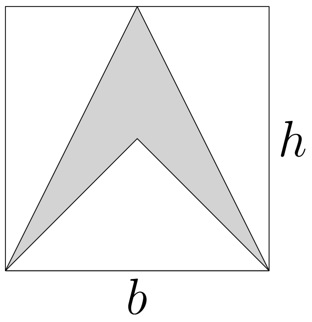
Konkurranse 1

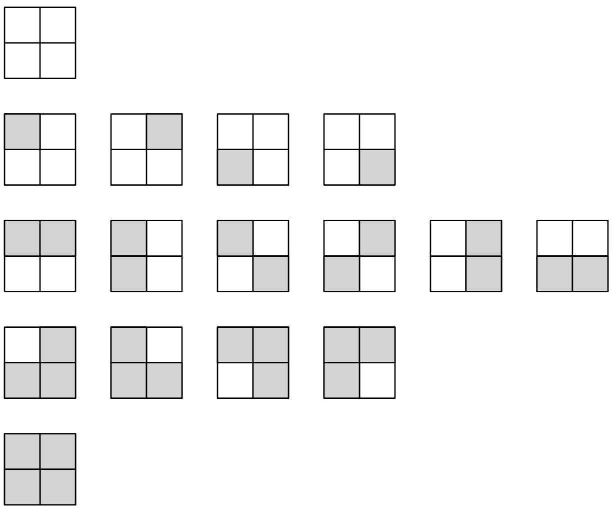
Tommy Odland
22. desember 2015
ENT3R UiB

Oppgave 1 (1 poeng per deloppgave)
(1) Dersom $h = 2$ og $b = 2$, hva er arealet av det grå området i figuren under?
(2) Klarer du å utlede en generell formel, med h og b?

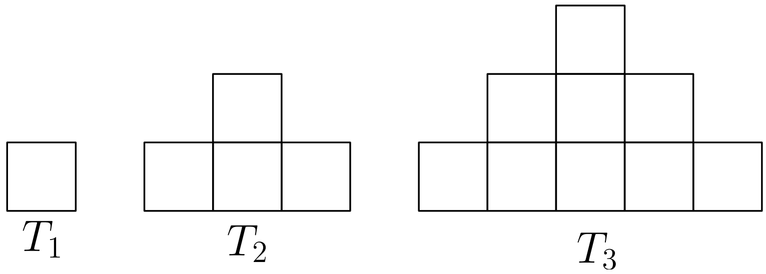


Oppgave 2 (1 poeng)
Eirik sin far bruker 20 minutter på å klippe plenen, mens Eirik bruker 30 minutter. Dersom de har to gressklippere og samarbeider, hvor lang tid vil det ta å klippe plenen?

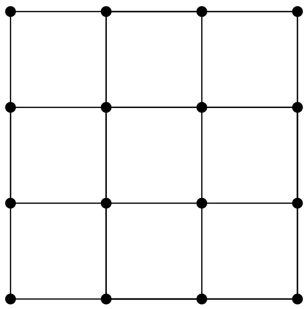
Oppgave 3 (1 poeng)
Som du ser nedenfor, kan en 2×2 firkant skyggelegges på 16 forskjellige måter.
På hvor mange måter kan en 5×5 firkant skyggelegges?



Oppgave 4 (1 poeng)
Vi bygger tårn som på bildet nedenfor. Som du ser trenger vi 1 kloss for å bygge T_1 og 4 klosser for å bygge T_2. Hvor mange klosser trenger vi for å bygge T_{100}?

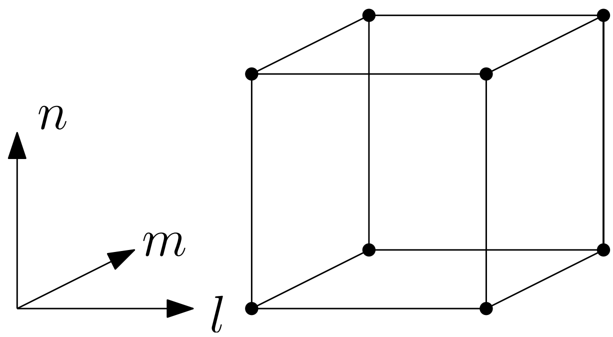


Oppgave 5 (2 poeng per deloppgave)
Nedenfor ser du en en firkantet figur med $N \times N$ *noder* og L *linker* mellom dem. Dersom man har $N = 4$, slik som i figuren under, er det $L = 24$ linker mellom dem.



(1) Hvor mange linker L er det dersom $N = 100$?
(2) Hva er linker som *funksjon* av noder, $L(N)$?

Oppgave 5 (2 poeng per deloppgave)
Nedenfor ser du en kube som med 2 noder i hver retning, der retningene er l, m og n. Vi lar $L(l, m, n)$ være *linker* som funksjon av noder. Som du ser er $L(2, 2, 2) = 12$.



(1) Hvor mange linker L er det dersom $l = 10$, $m = 20$ og $n = 30$?
(2) Hva er linker som *funksjon* av noder $L(l, m, n)$?

Konkurranse 2

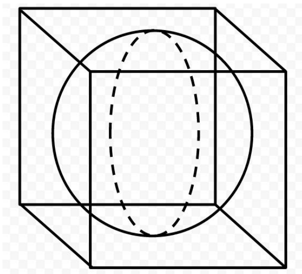
Tommy Odland
22. desember 2015
ENT3R UiB

Oppgave 1 – Kule i terning (1 poeng)

En kule ligger inni en terning, som vist på figuren under. Kulen ligger helt inntil veggene i terningen. Du får oppgitt at formelen for volum av terning og kule er:

$$V_{terning} = (side)^3$$

$$V_{kule} = \frac{4}{3}\pi(radius)^3$$



Hvor mange prosent av terningen rommer kulen?

Oppgave 2 – Sum av oddetall (1 poeng)

Summen av de tre første oddetallene er $1 + 3 + 5$, som er lik 9. Hva er summen av de første 100 oddetallene?

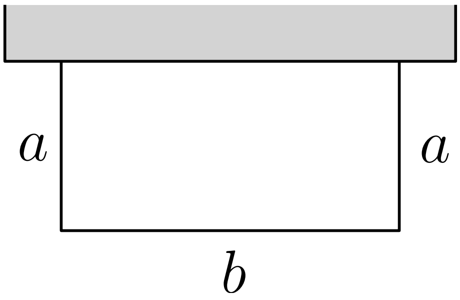
Oppgave 3 – Veinett (1 poeng per deloppgave)

La oss tenke på byer som skal sluttes sammen med veier. En vei må gå direkte fra en by til en annen by. Dersom vi har 2 byer $\{a, b\}$, må vi bygge 1 vei – fra a til b. Dersom vi har 3 byer $\{a, b, c\}$ må vi bygge 3 veier – fra a til b, fra a til c og fra b til c.
(1) Hvor mange veier må vi bygge for å få veier mellom 10 byer?
(2) I matematikk liker vi å *generalisere*. Istedet for å tenke på 5, 10 eller 15 byer, spør vi oss selv hvor mange veier vi må bygge for å slutte sammen n byer?

Oppgave 4 – Bonde og høns (1 poeng)

En bonde har kjøpt 100 meter med gjerde. På eiendommen sin ønsker han å lage en liten hønsegård med dette gjerdet. Han ønsker selvsagt at hønene skal ha mest mulig område til rådighet. Hva er det maksimale området som kan inngjerdes med 100 meter gjerde?

Oppgave 5 – Bonde og høns (DEL II) (1 poeng)
Bonden forlater idéen fra forrige oppgave. Istedet bestemmer han seg for å inngjerde hønene med en *rektangulær hønsegård inntil låveveggen* (låveveggen er markert i grått på bildet under). Han har fremdeles 100 meter med gjerde. Dette betyr at $a + a + b$ må være lik 100. Hva er det maksimale området han kan inngjerde nå?



Oppgave 6 – Søkealgoritme (1 poeng per deloppgave)
Nedenfor ser du en liste med 15 tall. En datamaskin skal lete etter et spesifikt tall i denne listen. Dersom listen *ikke er sortert*, vil det i verste fall ta 15 sjekker før datamaskinen finner tallet. Dette samsvarer med at tallet ligger i posisjonen som datamaskinen sjekker til sist (f.eks. helt til høyre, og datamaskinen starter fra venstre).

Dersom listen med tall *er sortert*, slik om i bildet nedenfor, er det mulig å gjøre sjekkingen mye raskere. Se for deg at du ikke vet hvilket tall som ligger i en spesifikk posisjon i listen før du sjekker. En god algoritme finner tallet som du leter etter, og sjekker minst mulig tall på veien.

2	9	11	15	28	33	40	47	51	64	76	77	82	85	94

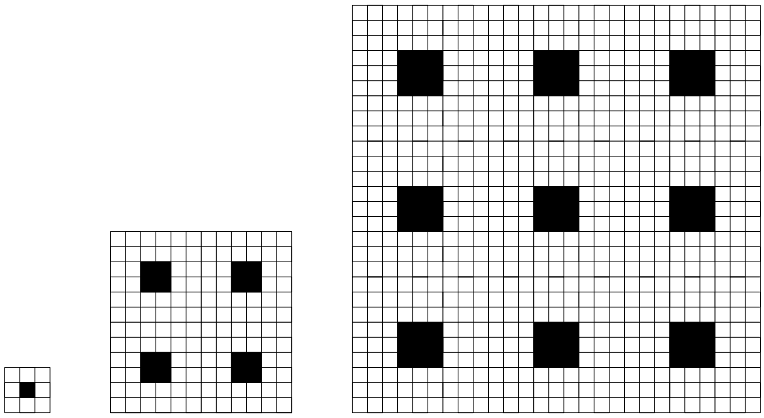
(1) Vis at i den sorterte listen ovenfor kan du, med en smart algoritme, finne et tall på 4 sjekker. Forklar hvorfor.
(2) Listen ovenfor inneholder 15 tall, og i verste tilfelle tar det 4 sjekker å finne et spesifikt tall. Hva er det verste tilfellet dersom listen inneholder n tall?

Konkurranse 3

Tommy Odland
22. desember 2015
ENT3R UiB

Oppgave 1 – Svarte prikker (1 poeng per deloppgave)

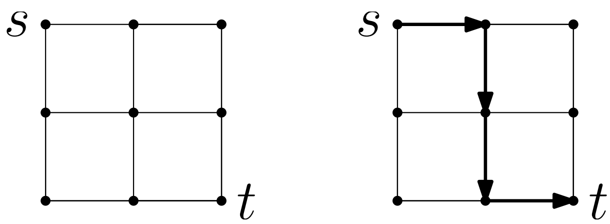
Se på figuren nedenfor:



I den første store firkanten er det én svart prikk, i den andre store firkanten er det 16 svarte prikker, og i den tredje store firkanten er det 81 svarte prikker.
a) Hvor mange svarte prikker vil det være i neste figur, det vil si i figur nummer fire?
b) Hvor mange svarte prikker vil det være i figur nummer 10?
c) Vi lar $S(n)$ være svarte prikker i figur nummer n, slik at $S(1) = 1$, $S(2) = 16$, $S(3) = 81$. Hva er $S(n)$ som funksjon av n?

Oppgave 2 – Veier fra s til t (2 poeng)

Ta en kikk på figuren nedenfor. I denne oppgaven ønsker vi å gå fra s til t. Vi har bare lov til å gå til høyre, eller ned, hver gang. Vi vil trenge 4 skritt for å komme oss fra s til t uansett hvilken vei vi velger.



Til høye på figuren ovenfor ser du en mulig vei fra s til t. Hvor mange slike veier finnes?

Oppgave 3 – Fermat's Siste Teorem (2 poeng)

I 1637 påsto franskmannen Pierre de Fermat at likningen:

$$a^n + b^n = c^n$$

Ikke hadde løsninger når n var større enn 2. Når $n = 2$ har vi eksempelvis løsningen $4^2 + 3^2 = 5^2$. I over 350 år klarte ingen å finne en løsning når n var større enn 2, men ingen klarte å bevise at det ikke fantes noen løsning heller[1]! En ENT3R mentor mener at han har funnet en løsning. Han mener at det finnes et tall $n > 2$ slik at likningen

$$2233445566^n + 7788990011^n = 9988776655^n$$

stemmer. Han vil vise dette med et dataprogram. Forklar hvorfor noe må være galt med programmet – dette kan ikke stemme!

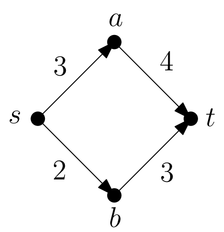
Oppgave 4 – Antall multiplikasjoner (2 poeng)

Dersom vi skal regne ut a^4 på en datamaskin trenger vi ikke å gange sammen a fire ganger! En mer effektiv metode er å først regne ut $a \times a = a^2$, også regne ut $a^2 \times a^2 = a^4$. Dette krever totalt 2 multiplikasjoner, å gange sammen a 4 ganger krever 3 multiplikasjoner: $a \times a \times a \times a$.

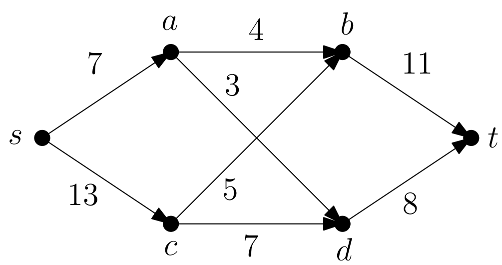
Minste antall multiplikasjoner som trengs for å regne ut a^4 er 2. Hva er minste antall multiplikasjoner som trengs for å regne ut a^9?

Oppgave 5 – Maksimal transport (1 poeng)

Vi skal sende mest mulig enheter fra s til t i et nettverk. Hver kant har en makskapasitet, gitt av et tall. Vi kan ikke sende flere enheter enn makskapasiteten langs en kant! I figuren nedenfor er maksimal transport lik 5: 3 opp via a og 2 ned via b.



Hva er maksimal transport i det mer avanserte nettverket nedenfor?



[1] Engelskmannen Sir Andrew John Wiles beviste i 1995 at det ikke finnes noen løsning når $n > 2$

ENT3R REALFAGSTRENING

Konkurranse 4

Tommy Odland

24. desember 2015

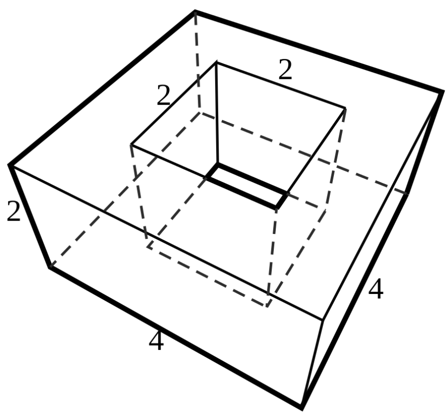
ENT3R UiB

Oppgave 1 – Sum av eksponenter (1 poeng)

Hva er summen av $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^{100}$?

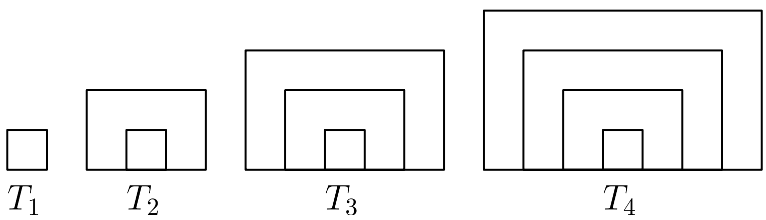
Oppgave 2 – Sum av eksponenter (1 poeng per deloppgave)

a) Hva er volumet og overflatearealet av figuren under?
b) Hva skjer med volumet og overflatearealet om alle lengdene *dobles*?
c) Hva skjer med volumet og overflatearealet om alle lengdene *ganges med n*? I forrige oppgave var $n = 2$.



Oppgave 3 – Figurer (1 poeng per deloppgave)

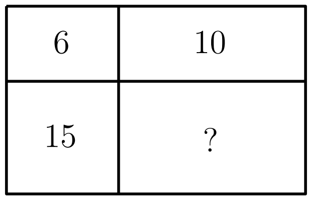
I denne oppgaven skal vi se på en spesiell type figur:



Figurene i sekvensen ovenfor er slik at det legges til et nytt lag i hver figur. Arealet av T_1 er 1, arealet av T_2 er 6, og arealet av T_3 er 15.
a) Hva er arealet av T_5?
b) Hva er arealet av T_{10}?
c) Det finnes en formel for arealet av T_n, der n er hvilket som helst tall større enn 1. Hva er formelen? Med andre ord: finn arealet av T_n.

Oppgave 4 – Ukjent areal (1 poeng)

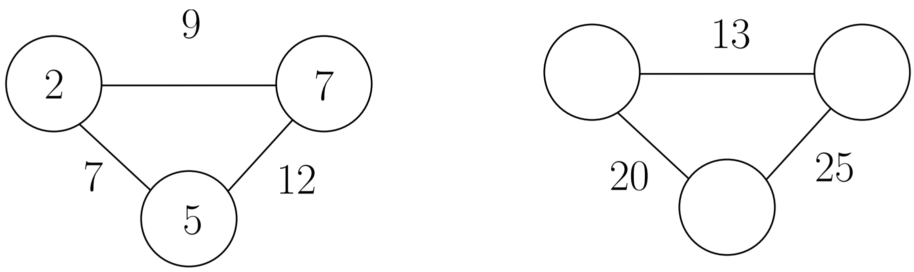
Et rektangel er delt inn i fire mindre rektangler som vist på figuren nedenfor.



Hva er arealet av det fjerde rektangelet, markert med spørsmålstegn? (figuren trenger *ikke* være riktig tegnet med tanke på tallene i rutene)

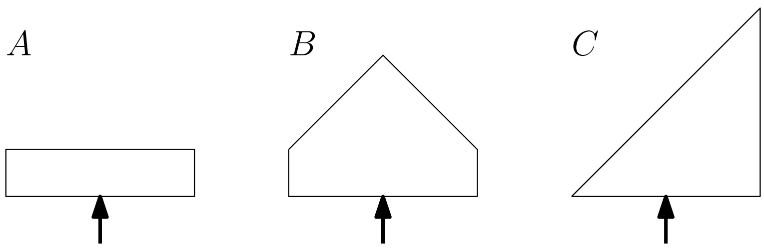
Oppgave 5 – Sirkelverdier (2 poeng)

Fyll i riktige tall i figuren til høyre nedenfor. Til venstre ser ut et eksempel der riktige verdier er fylt inn. Regelen er at tallene i to sirkler må være slik at summen av dem er lik tallet på kanten som binder dem sammen.



Oppgave 6 – Balansering av figurer (2 poeng)

Tenk deg at du skal balansere figurene i bildet nedenfor på fingerspissen din.



Pilene på figur A og B viser riktig plassering. For å balansere figurene må man plassere fingeren på midten av figurene. Figur C viser en vinkelrett, likebeint trekant. På figur C er plasseringen av pilen *feil* – dersom du forsøker å balansere en trekant slik som vist vil den tippe til høyre! Hvor langt bort må pilen være for å balansere figur C slik at den ikke tipper? (Vi er ute etter en brøk som sier noe om hvor lang bort. Eks: 1/2, 3/4 eller 5/8)

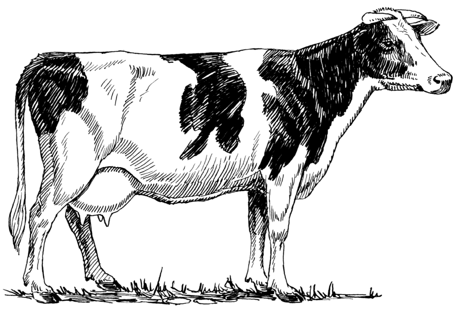
Konkurranse 5

Tommy Odland
2. februar 2016
ENT3R UiB

Oppgave 1 – Tennisball og racket (1 poeng)
Du skal kjøpe en tennisball og en tennisracket. Til sammen koster ballen og racketen 110 kroner. Racketen koster 100 kroner mer enn ballen. Hva koster ballen?

Oppgave 2 – Passord og sikkerhet (1 poeng per deloppgave)
Vi skal lage passord. Vi har lov til å bruke store og små bokstaver, samt tall.[1]
a) Hvor mange ulike *symboler* kan vi bruke? (Et symbol er et *tegn*: stor eller liten bokstav, eller tall.)
b) Hvor mange passord med lengde 5 kan vi lage?
For eksempel '`AkdC5`' eller '`zy788`'.
c) Hvor mange passord med lengde 5 kan vi lage, dersom vi ikke har lov til å bruke samme symbol mer enn én gang?
'`Aan97`' og '`58Dgv`' er lov, '`ji38i`' er ikke lov.
d) Hvor mange passord med lengde 5 kan vi lage, dersom samme symbol ikke kan komme 2 ganger på rad?
'`i7i7a`' og '`7AaiA`' er lov, '`8aa2j`' er ikke lov.
e) Du har lov til å lage passord på hvilken som helst måte, akkurat som i oppgave a). En datamaskin kan gjette 1000 forskjellige passord i sekundet. Universet er 13.8×10^9 år gammelt. Hvor langt må et tilfeldig passord være for at datamaskinen skal (i gjennomsnitt) bruke mer enn 13.8×10^9 år på å gjette riktig passord?

Oppgave 3 – Penger og dyr (1 poeng per deloppgave)
En bonde har 100 tusenlapper. For disse 100 tusenlappene skal han kjøpe 100 dyr. En hest koster 10 tusenlapper, en sau koster 3,5 tusenlapper og en kylling koster 0,5 tusenlapper. Vis skal undersøke hvor mange hester, sauer og kyllinger må bonden kjøpe for å bruke alle 100 tusenlappene, og ende opp med 100 dyr.

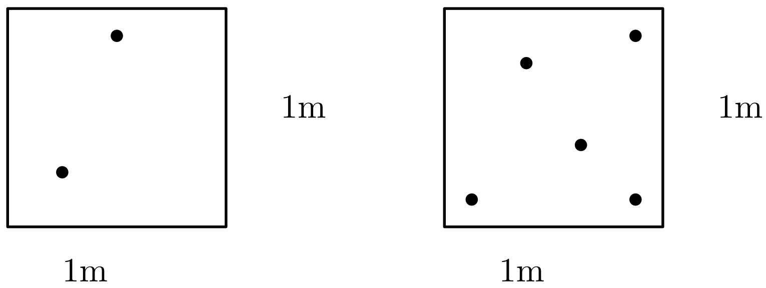


[1] Det finnes 29 bokstaver i det norske alfabetet.

a) Det finnes to likninger som beskriver situasjonen. La antall hester være h, antall sauer være s og antall kylling være k. Skriv opp de to likningene.
b) Hvilke verdier av h, s og k er realistiske (nedre og øvre grenser)?
c) Løs problemet. Finn h, s og k.

Oppgave 4 – Avstand mellom punkter (1 poeng per deloppgave)

Dersom vi plasserer 2 punkter i et kvadrat, med sidelengder $1\text{m} \times 1\text{m}$, kan vi garantere at avstanden mellom dem vil være $\leq \sqrt{2}$ *meter*. Avstanden mellom dem vil med andre ord være mindre enn, eller lik, $\sqrt{2}$ meter. Se figuren under til venstre.



a) Vis at det finnes alltid 2 punkter som er nærmere enn $1/\sqrt{2}$ m dersom vi plasserer 5 punkter i kvadratet. Se figuren ovenfor til høyre. (HINT: Del kvadratet opp i fire mindre kvadrater.)
b) Hvilken avstand må to punkter være nærmere enn dersom vi plasserer 10 punkter i kvadratet?
c) Hvilken avstand må to punkter være nærmere enn dersom vi plasserer n^2+1 punkter i kvadratet?

Oppgave 5 – Stort delelig tall (3 poeng)

2520 er det minste tallet som kan deles på alle tall mellom 1 og 10 (inklusive 1 og 10) uten noen restverdi. Hva er det minste tallet som kan deles på alle tall mellom 1 og 20 (inklusive 1 og 20) uten noen restverdi?